



ANÁLISE DE CONFIABILIDADE DE SEÇÕES SUBMETIDAS À FLEXÃO SIMPLES E COMPOSTA PELO MÉTODO DE MONTE CARLO

Felipe Pinheiro de Souza Bastos

Projeto de Graduação apresentado ao Curso de Engenharia Civil da Escola Politécnica, Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Engenheiro.

Orientadores: Cláudia Ribeiro Eboli

Sérgio Hampshire de Carvalho Santos

Rio de Janeiro

Agosto de 2012

ANÁLISE DE CONFIABILIDADE DE SEÇÕES SUBMETIDAS À FLEXÃO
SIMPLES E COMPOSTA PELO MÉTODO DE MONTE CARLO

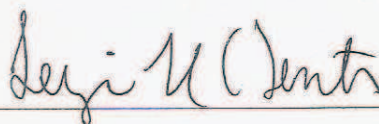
Felipe Pinheiro de Souza Bastos

PROJETO DE GRADUAÇÃO SUBMETIDO AO CORPO DOCENTE DO CURSO
DE ENGENHARIA CIVIL DA ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE
FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE ENGENHEIRO CIVIL.

Examinada por:



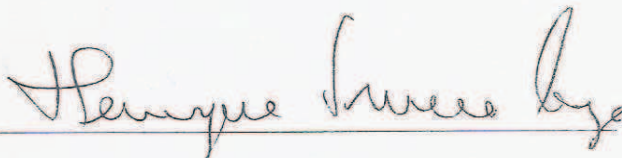
Prof.ª Cláudia Ribeiro Eboli, D.Sc.



Prof. Sérgio Hampshire de Carvalho Santos, D.Sc.



Prof. Luiz Eloy Vaz, Dr.-Ing.



Prof. Henrique Innecco Longo, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

AGOSTO de 2012

Bastos, Felipe Pinheiro de Souza

Análise de Confiabilidade de Seções Submetidas à Flexão Simples e Composta Pelo Método de Monte Carlo/ Felipe Pinheiro de Souza Bastos. – Rio de Janeiro: UFRJ/ Escola Politécnica, 2012.

XIII, 108 p.: il.; 29,7 cm.

Orientadores: Cláudia Ribeiro Eboli e Sérgio Hampshire de Carvalho Santos

Projeto de Graduação – UFRJ/ Escola Politécnica/ Curso de Engenharia Civil, 2012.

Referências Bibliográficas: p. 96-97.

1. Concreto Armado 2. Análise de Confiabilidade. 3. Método de Monte Carlo.

I. Eboli, Cláudia Ribeiro et al. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Escola Politécnica, Curso de Engenharia Civil. III. Título.

Resumo do Projeto de Graduação apresentado à Escola Politécnica/ UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Engenheiro Civil.

ANÁLISE DE CONFIABILIDADE DE SEÇÕES SUBMETIDAS À FLEXÃO SIMPLES E COMPOSTA PELO MÉTODO DE MONTE CARLO

Felipe Pinheiro de Souza Bastos

Agosto/2012

Orientadores: Cláudia Ribeiro Eboli e Sérgio Hampshire de Carvalho Santos

Curso: Engenharia Civil

A norma brasileira de projeto de estruturas de concreto – NBR 6118 – apresenta coeficientes de majoração das cargas e de minoração das resistências dos materiais que não foram completamente amparados por uma análise de confiabilidade. Por esse motivo, as probabilidades de falha de diferentes elementos estruturais dimensionados de acordo com os mesmos princípios podem ser bastante diferentes, sendo alguns muito seguros e outros nem tanto.

Este trabalho tem como objetivo avaliar a probabilidade de falha à flexão simples e à flexo-compressão das seções mais solicitadas de elementos estruturais usuais, dimensionados de acordo com a referida norma. As seções estudadas são retangulares e possuem armadura disposta ao longo de um bordo (flexão simples) ou disposta próxima aos dois bordos (flexo-compressão). Para realizar a análise de confiabilidade, será utilizado o método de simulação de Monte Carlo, com o auxílio de um programa comercial.

As probabilidades de falha encontradas para os diversos elementos estudados serão comparadas entre si e também com o valor alvo estabelecido no Eurocode EN 1990 (2001).

Palavras-chave: Concreto Armado, Análise de Confiabilidade, Método de Monte Carlo.

Abstract of Undergraduate Project presented to POLI/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Engineer.

RELIABILITY ANALYSIS OF SECTIONS SUBJECTED TO BENDING MOMENTS
BY THE MONTE CARLO METHOD

Felipe Pinheiro de Souza Bastos

August/2012

Advisor: Cláudia Ribeiro Eboli and Sérgio Hampshire de Carvalho Santos

Course: Civil Engineering

The Brazilian Standard for the design of concrete structures, NBR 6118, defines partial safety factors for the loads and strength of materials that were not fully supported by a reliability analysis. Therefore, the probability of failure of different structural elements designed according to the same principles can be quite different, some being very secure and others not so secure.

This study objective is to evaluate the probability of failure of simple bending and eccentric compression of the most loaded sections of usual structural elements, designed according to the aforementioned standard. The studied sections are rectangular and have steel reinforcement disposed along one edge (simple bending) or disposed next to the two edges (eccentric compression). To perform the reliability analysis will be used the method of Monte Carlo simulation, with the aid of a commercial program.

The failure probabilities of the various studied elements are then compared among themselves and with the target value established in Eurocode EN 1990 (2001).

Keywords: Reinforced Concrete, Reliability Analysis, Monte Carlo Method.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	1
1.1. Considerações gerais.....	1
1.2. Objetivos e justificativas.....	2
1.3. Escopo do trabalho.....	2
2. CONCEITOS DE PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA	3
2.1. Introdução	3
2.2. Axiomas	4
2.3. Variáveis aleatórias.....	4
2.4. Funções de variáveis aleatórias.....	5
2.5. Momentos de variáveis aleatórias.....	6
2.5.1. Média.....	6
2.5.2. Variância e desvio padrão.....	7
2.5.3. Outros momentos.....	8
2.6. Associação entre duas variáveis aleatórias	9
2.7. Distribuições aleatórias contínuas	11
2.7.1. Uniforme ou retangular	11
2.7.2. Normal.....	12
2.7.3. Lognormal	14
2.7.4. Gumbel	15
3. CONCEITOS DE CONFIABILIDADE.....	17
3.1. Introdução	17
3.2. Variáveis básicas.....	17
3.3. Índice de confiabilidade.....	18
3.4. Definição do tipo de distribuição e seus parâmetros	19
3.5. Problema básico	20

3.6.	Métodos de Análise	22
3.7.	Método de Monte Carlo	22
3.7.1.	Definição do problema	23
3.7.2.	Procedimentos de resolução	23
3.7.3.	Exemplo do método.....	27
3.7.4.	Número de amostras	27
3.8.	Definição de um risco aceitável.....	28
3.8.1.	Valores alvo	29
4.	CONCEITOS DE CONCRETO ARMADO	30
4.1.	Propriedades dos materiais	30
4.1.1.	Concreto	30
4.1.2.	Aço	33
4.2.	Método dos coeficientes parciais.....	34
4.3.	Ações	35
4.3.1.	Ações permanentes	35
4.3.2.	Ações variáveis.....	35
4.3.3.	Ações excepcionais.....	35
4.4.	Combinações de ações no estado limite último	35
4.5.	Dimensionamento a solicitações normais de acordo com a NBR-6118	36
4.5.1.	Estados limites.....	36
4.5.2.	Verificação dos estados limites últimos	36
4.6.	Domínios de ruptura para seções sob solicitações normais.....	37
4.6.1.	Reta a	37
4.6.2.	Domínio 1	38
4.6.3.	Domínio 2	38
4.6.4.	Domínio 3	38
4.6.5.	Domínio 4.....	38

4.6.6.	Domínio 4a	38
4.6.7.	Domínio 5	39
4.6.8.	Reta b.....	39
4.7.	Cr�terio de ductilidade	39
5.	FLEXÃO SIMPLES	40
5.1.	Casos estudados	40
5.2.	Dados gerais.....	41
5.2.1.	Fun�o de falha.....	41
5.2.2.	Variáveis aleatórias.....	43
5.2.3.	Número de amostras	43
5.2.4.	Determina�o dos esforços solicitantes	43
5.3.	Descri�o do programa utilizado	45
5.4.	Exemplos numéricos variando a taxa de armadura.....	46
5.4.1.	Descri�o	46
5.4.2.	Valores das variáveis aleatórias.....	46
5.4.3.	Resultados.....	55
5.5.	Exemplos numéricos de lajes.....	59
5.5.1.	Descri�o	59
5.5.2.	Valores de entrada das variáveis aleatórias	59
5.5.3.	Resultados.....	63
5.6.	Exemplos numéricos de lajes com o coeficiente γ_n	67
5.6.1.	Descri�o	67
5.6.2.	Valores das variáveis aleatórias.....	67
5.6.3.	Resultados.....	69
5.7.	Exemplos numéricos de vigas.....	73
5.7.1.	Descri�o	73
5.7.2.	Valores de entrada	73

5.7.3.	Resultados.....	75
5.8.	Comparação entre os problemas de flexão	76
6.	FLEXO-COMPRESSÃO	79
6.1.	Casos estudados	79
6.2.	Dados gerais.....	80
6.2.1.	Função de falha.....	80
6.2.2.	Variáveis aleatórias.....	83
6.2.3.	Número de amostras	84
6.2.4.	Determinação dos esforços solicitantes.....	84
6.3.	Descrição do programa utilizado	84
6.4.	Exemplos numéricos de flexo-compressão de pilares	84
6.4.1.	Descrição	85
6.4.2.	Valores de entrada	85
6.4.3.	Resultados.....	90
7.	CONCLUSÕES E SUGESTÕES.....	96
8.	BIBLIOGRAFIA	97
9.	ANEXOS	99
A.	Tabela de distribuição normal padrão	99
B.	Exemplo do Método de Monte Carlo	101
C.	Programa VaP.....	106

LISTA DE FIGURAS

Figura 2-1 – Ilustração do conceito de desvio padrão e variância.....	8
Figura 2-2 – Dependência linear entre variáveis aleatórias.....	10
Figura 2-3 – Função densidade de variável com distribuição uniforme.....	11
Figura 2-4 – Função cumulativa de variável com distribuição uniforme.....	12
Figura 2-5 – Função de densidade de variáveis com distribuição normal.....	13
Figura 2-6 – Funções cumulativas de variáveis com distribuição normal	14
Figura 2-7 – Funções densidade de variáveis com distribuição lognormal.....	15
Figura 2-8 – Funções cumulativas de variáveis com distribuição lognormal	15
Figura 2-9 – Funções densidade de variáveis com distribuição Gumbel	16
Figura 2-10 – Funções cumulativas de variáveis com distribuição Gumbel.....	16
Figura 3-1 – Índice de confiabilidade.....	18
Figura 3-2 – Curvas das funções densidade de probabilidade das variáveis Z, R e S....	21
Figura 3-3 - Método da transformação inversa	25
Figura 4-1 - Valor característico da resistência	31
Figura 4-2 – Diagrama de cálculo de tensão-deformação do concreto	32
Figura 4-3 - Diagrama de cálculo de tensão-deformação do aço CA-50	34
Figura 4-4 - Estados Limites da NBR6118	37
Figura 5-1 - Índice de confiabilidade para os casos analisados.....	58
Figura 5-2 - Índice de confiabilidade	65
Figura 5-3 – Fator de importância das variáveis na função de falha.....	66
Figura 5-4 - Índice de confiabilidade para os casos analisados.....	72
Figura 5-5 – Índice de confiabilidade das vigas	76
Figura 5-6 - Índice de confiabilidade – influência do coeficiente γ_n nas lajes	77
Figura 5-7 – Índices de confiabilidade – influência das dimensões do elemento	77
Figura 6-1 - Seção transversal	79
Figura 6-2 – Solicitações na seção transversal	80
Figura 6-3 - Distâncias d_1 e d_2	82
Figura 6-4 - Índice de confiabilidade dos pilares no domínio 3.....	93
Figura 6-5 - Índice de confiabilidade dos pilares no domínio 4.....	93
Figura 6-6 - Índice de confiabilidade dos pilares	94
Figura 6-7 – Fator de importância das variáveis na função de falha.....	95
Figura 9-1 - Tela inicial do programa VaP	106

Figura 9-2 - Janela para entrada da função de falha	106
Figura 9-3 - Janela para definir os parâmetros das variáveis aleatórias	107
Figura 9-4 - Janela mostrando o resultado do método de Monte Carlo	108
Figura 9-5 - Resumo dos resultados na forma de texto	108

LISTA DE TABELAS

Tabela 3-1 - Resultados do exemplo pelo Método de Monte Carlo.....	27
Tabela 3-2 – Parâmetros para o cálculo do número de amostras	28
Tabela 5-1 - Descrição das variáveis aleatórias.....	42
Tabela 5-2 – Distribuições e parâmetros adotados.....	43
Tabela 5-3 – Parâmetros das variáveis aleatórias.....	46
Tabela 5-4 - Parâmetros de As e d.....	47
Tabela 5-5 - Esforços em função de χ	47
Tabela 5-6 - Parâmetros de As e d.....	48
Tabela 5-7 - Esforços em função de χ	48
Tabela 5-8 - Parâmetros de As e d.....	49
Tabela 5-9 - Esforços em função de χ	49
Tabela 5-10 - Parâmetros de As e d.....	50
Tabela 5-11 - Esforços em função de χ	50
Tabela 5-12 - Parâmetros de As e d.....	51
Tabela 5-13 - Esforços em função de χ	51
Tabela 5-14 - Parâmetros de As e d.....	52
Tabela 5-15 - Esforços em função de χ	52
Tabela 5-16 - Parâmetros de As e d.....	53
Tabela 5-17 - Esforços em função de χ	53
Tabela 5-18 - Parâmetros de As e d.....	54
Tabela 5-19 - Esforços em função de χ	54
Tabela 5-20 - Resultados da laje com h=10 cm e $\rho=0,4\%$	55
Tabela 5-21 - Resultados da laje com h=10cm e $\rho=0,8\%$	55
Tabela 5-22 - Resultados da laje com h=20cm e $\rho=0,4\%$	56
Tabela 5-23 - Resultados da laje com h=20cm e $\rho=0,8\%$	56
Tabela 5-24 - Resultados da laje com h=20cm e kmd limite	56
Tabela 5-25 - Resultados da viga 20x50 e $\rho=0,4\%$	57
Tabela 5-26 - Resultados da viga 20x50 e $\rho=0,8\%$	57
Tabela 5-27 - Resultados da viga 20x50 e kmd limite	57
Tabela 5-28 – Valores das variáveis para os problemas.....	59
Tabela 5-29 - Altura útil das lajes	59
Tabela 5-30 - Parâmetro dos momentos solicitantes para a laje de 10 cm.....	60

Tabela 5-31 - Parâmetro dos momentos solicitantes para a laje de 12 cm.....	60
Tabela 5-32 - Parâmetro dos momentos solicitantes para a laje de 15 cm.....	61
Tabela 5-33 - Parâmetro dos momentos solicitantes para a laje de 17 cm.....	61
Tabela 5-34 - Parâmetro dos momentos solicitantes para a laje de 19 cm.....	62
Tabela 5-35 - Parâmetro dos momentos solicitantes para a laje de 20 cm.....	62
Tabela 5-36 - Resultados para a laje de h=10cm.....	63
Tabela 5-37- Resultados	63
Tabela 5-38 - Resultados	64
Tabela 5-39 - Resultados	64
Tabela 5-40 - Resultados	64
Tabela 5-41 - Resultados	65
Tabela 5-42 - Variáveis aleatórias adotadas	67
Tabela 5-43 - Altura útil das lajes	67
Tabela 5-44 - Variáveis aleatórias dos momentos solicitantes para a laje de 10 cm.....	68
Tabela 5-45 - Variáveis aleatórias dos momentos solicitantes para a laje de 12 cm.....	68
Tabela 5-46 - Variáveis aleatórias dos momentos solicitantes para a laje de 15 cm.....	69
Tabela 5-47 - Variáveis aleatórias dos momentos solicitantes para a laje de 17 cm.....	69
Tabela 5-48 - Resultados para a laje com h=10cm e coeficiente γ_n	70
Tabela 5-49 - Resultados para a laje com h=12cm e coeficiente γ_n	70
Tabela 5-50 - Resultados para a laje com h=15cm e coeficiente γ_n	71
Tabela 5-51 - Resultados para a laje com h=17cm e coeficiente γ_n	71
Tabela 5-52 – Valores das variáveis para os problemas.....	73
Tabela 5-53 - Parâmetros da altura útil (d).....	73
Tabela 5-54 - Média e desvio padrão das solicitações	74
Tabela 5-55 - Média e desvio padrão das solicitações - viga 20 x 70	74
Tabela 5-56 - Resumo dos resultados para a viga 20 x 50 cm	75
Tabela 5-57 - Resumo dos resultados para a viga 20 x 70 cm	75
Tabela 6-1 - Descrição das variáveis aleatórias.....	83
Tabela 6-2 - Variáveis aleatórias adotadas	84
Tabela 6-3 – Valores das variáveis para os problemas.....	85
Tabela 6-4 - Altura dos pilares	86
Tabela 6-5 – Tensões e excentricidade para o pilar 12 cm x 60 cm – Domínio 3.....	86
Tabela 6-6 - Parâmetros dos momentos para o pilar de 12 cm x 60 cm – Domínio 3 ...	86
Tabela 6-7 – Tensões e excentricidade para o pilar 12 cm x 60 cm – Domínio 4.....	87

Tabela 6-8 - Parâmetros dos momentos para o pilar de 12 cm x 60 cm – Domínio 4 ...	87
Tabela 6-9 – Tensões e excentricidade para o pilar 15 cm x 60 cm – Domínio 3.....	87
Tabela 6-10 - Parâmetros dos momentos para o pilar de 15 cm x 60 cm – Domínio 3 .	88
Tabela 6-11 – Tensões e excentricidade para o pilar 15 cm x 60 cm – Domínio 4.....	88
Tabela 6-12 - Parâmetros dos momentos para o pilar de 15 cm x 60 cm – Domínio 4 .	88
Tabela 6-13 – Tensões e excentricidade para o pilar 20 cm x 60 cm – Domínio 3.....	89
Tabela 6-14 - Parâmetros dos momentos para o pilar de 20 cm x 60 cm – Domínio 3 .	89
Tabela 6-15 – Tensões e excentricidade para o pilar 20 cm x 60 cm – Domínio 4.....	89
Tabela 6-16 - Parâmetros dos momentos para o pilar de 20 cm x 60 cm – Domínio 4 .	90
Tabela 6-17 - Resultados do Pilar 12 x 60 – Domínio 3	90
Tabela 6-18 - Resultados do Pilar 15 x 60 – Domínio 3	91
Tabela 6-19 - Resultados do Pilar 20 x 60 – Domínio 3	91
Tabela 6-20 - Resultados do Pilar 12 x 60 – Domínio 4	91
Tabela 6-21 - Resultados do Pilar 15 x 60 – Domínio 4	92
Tabela 6-22 - Resultados do Pilar 20 x 60 – Domínio 4	92

1. INTRODUÇÃO

1.1. Considerações gerais

Quando um engenheiro civil projeta uma estrutura, ou um elemento estrutural, a sua maior preocupação é em relação à segurança. Ou seja, deseja-se que esta estrutura (ou elemento estrutural) não sofra ruptura, o que pode ocasionar perda de vidas ou prejuízos financeiros.

O ideal seria que a estrutura fosse totalmente segura, ou seja, uma estrutura 100% confiável. Porém, de acordo com a teoria da probabilidade, esta segurança não pode ser atingida. Pode-se, entretanto, atingir valores de confiabilidade relativamente próximos a um, o que significa uma probabilidade de falha perto de zero.

O problema é que quanto mais se aumenta a segurança de uma estrutura, maior tende a ser a quantidade de material utilizado e, conseqüentemente, o seu custo. Portanto, o objetivo do engenheiro em um projeto estrutural não deve ser encarado simplesmente como “projetar uma estrutura totalmente segura”. Este objetivo deve ser considerado como sendo o de se projetar uma estrutura que, na sua vida útil, atenda aos requisitos de segurança e durabilidade ao menor custo possível.

Este trabalho irá analisar, pelo método de Monte Carlo, a confiabilidade à flexão das seções mais solicitadas de elementos estruturais que foram dimensionadas de acordo com a norma NBR 6118 (2007). Devido à ausência de norma nacional, os índices de confiabilidade serão comparados com valores estabelecidos em normas internacionais.

Ao final do trabalho, são apresentados alguns exemplos numéricos, os resultados obtidos e as conclusões.

Este trabalho segue uma linha de pesquisa sobre confiabilidade que vem sendo adotada no Departamento de Estruturas (DES). Dentre os trabalhos sobre este assunto podem ser citados alguns artigos escritos pelos orientadores deste projeto: SANTOS e EBOLI (2006), EBOLI e VAZ (2005) e STUCCHI e SANTOS (2011). Outro trabalho recente sobre o assunto é o projeto final de FRANCO (2010).

1.2. Objetivos e justificativas

O presente trabalho, elaborado pelo aluno Felipe Pinheiro de Souza Bastos e orientado pela Professora Claudia Ribeiro Eboli e pelo Professor Sergio Hampshire de Carvalho Santos, tem como principal objetivo calcular o índice de confiabilidade à flexão reta (simples e composta) de seções de concreto armado dimensionadas de acordo com a norma brasileira NBR 6118 e comparar os valores obtidos com os valores recomendados em normas internacionais.

1.3. Escopo do trabalho

O trabalho está dividido nos seguintes capítulos:

CAPÍTULO 2 – apresenta conceitos de probabilidade e estatística;

CAPÍTULO 3 – apresenta conceitos de confiabilidade e o Método de Monte Carlo;

CAPÍTULO 4 – apresenta conceitos do dimensionamento de estruturas de concreto armado;

CAPÍTULO 5 – apresenta o problema de flexão reta simples e exemplos numéricos;

CAPÍTULO 6 – apresenta o problema de flexo-compressão reta e exemplos numéricos;

CAPÍTULO 7 – apresenta as conclusões.

2. CONCEITOS DE PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA

Grande parte da análise de confiabilidade é baseada nos conceitos de probabilidade e estatística. Alguns desses conceitos serão apresentados neste capítulo.

2.1. Introdução

A probabilidade demonstra por meio de números a chance de algum evento predefinido ocorrer. Segundo MELCHERS (1999) e FABER (2001), a probabilidade da ocorrência de um evento pode ser estimada por meio de três formas:

- I) estabelecimento de hipóteses sobre o fenômeno (abordagem clássica);
- II) observação repetida dos eventos (abordagem frequentista);
- III) opinião de um observador (abordagem bayesiana).

A primeira forma será ilustrada com o seguinte exemplo. Imagine que se deseja conhecer a probabilidade de se obter cara ao se jogar uma moeda. Sabe-se que há somente dois resultados possíveis: cara ou coroa. Considerando que a moeda não esteja viciada, a probabilidade de se tirar cara é a mesma de se tirar coroa, ou seja, é de 50%.

A segunda forma também será ilustrada com o exemplo da moeda. De acordo com esta abordagem, é necessário realizar um número de experimentos, de preferência grande, para se conhecer a probabilidade do evento. Então, se a moeda for jogada 500 vezes e, destas 500 vezes, 256 tiverem dado cara como resultado, a probabilidade de se tirar cara será

$$p_{cara} = \frac{256}{500} = 0,512 = 51,2\% \quad (2-1)$$

e, conseqüentemente, a probabilidade de se tirar coroa será

$$p_{coroa} = \frac{500 - 256}{500} = 1 - 0,512 = 48,8\%. \quad (2-2)$$

Espera-se que à medida que o número de experimentos aumente, a probabilidade de se obter cara ou coroa aproxime-se de 50%.

A terceira forma é baseada no princípio de Bayes. As probabilidades são baseadas na opinião de um observador, geralmente um especialista. O observador pode até mesmo utilizar as abordagens anteriores (frequentista e clássica) para basear a sua opinião. Por

ser baseada em opiniões, duas pessoas podem estimar probabilidades diferentes para o mesmo evento. Apesar de a probabilidade de um evento na abordagem bayesiana ser dependente da pessoa que a faz, a liberdade de se definir esta probabilidade na análise de confiabilidade de estruturas não é grande, como pode parecer (FABER, 2001).

A abordagem bayesiana é a mais utilizada nas análises de confiabilidade, visto que as duas anteriores são de aplicação limitada. Esta limitação decorre do fato de o número de estruturas idênticas ser muito pequeno, ou mesmo um, e as condições de carregamento das estruturas serem diferentes entre si. Além disso, não se tem muitos dados sobre falhas de estruturas.

2.2. Axiomas

Toda a teoria da probabilidade é baseada nos seguintes axiomas (FABER, 2001):

- I) a probabilidade de um evento A ocorrer é um número real tal que

$$0 \leq P(A) \leq 1; \quad (2-3)$$

- II) a probabilidade de um evento certo C ocorrer é $P(C) = 1$ e, de um evento impossível I, é $P(I) = 0$;

- III) a probabilidade de ocorrência de pelo menos um dos eventos E_1 e E_2 é dada pela expressão a seguir, comumente chamada de regra da adição

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2). \quad (2-4)$$

Se E_1 e E_2 forem mutuamente exclusivos, ou seja, se a probabilidade de eles ocorrerem simultaneamente for nula, então a probabilidade de ocorrência de pelo menos um dos eventos E_1 e E_2 será dada por

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2). \quad (2-5)$$

2.3. Variáveis aleatórias

Quando um experimento é realizado diversas vezes, é provável que os valores medidos em cada experimento não sejam iguais entre si, mesmo quando realizados sob as mesmas condições. Se esta variabilidade nos resultados realmente ocorre, a grandeza estudada é uma variável aleatória. Por outro lado, se os valores medidos forem idênticos, tem-se uma grandeza determinística.

As variáveis aleatórias podem, em geral, ser representadas por distribuições aleatórias. Para isso, é necessário que se determine alguns parâmetros destas variáveis. Os mais comuns são a média e o desvio padrão.

As variáveis aleatórias podem ser qualitativas ou quantitativas. Variáveis qualitativas são aquelas que apresentam como realizações uma qualidade, enquanto variáveis quantitativas apresentam como realizações números resultantes de uma contagem ou mensuração (BUSSAB; MORETTIN, 2004). A classificação da rugosidade do terreno, utilizada para se obter a velocidade característica do vento, pode ser interpretada como uma variável do tipo qualitativa. Por outro lado, o peso próprio de uma estrutura é uma variável quantitativa.

As variáveis quantitativas podem ser classificadas em discretas ou contínuas. Variáveis discretas são aquelas que só podem assumir valores discretos. Um exemplo deste tipo de variável é o número médio de anos que uma determinada solicitação na estrutura leva para atingir ou ultrapassar um determinado valor.

Por outro lado, variáveis contínuas são aquelas que podem assumir qualquer valor real dentro de um determinado intervalo. Como exemplo, pode ser citada a resistência do concreto ou a altura efetiva de uma viga. Nas análises realizadas neste trabalho serão usadas somente variáveis quantitativas e contínuas.

Para facilitar a compreensão, será utilizada letra maiúscula para designar a variável aleatória (ex: “X”) e letra minúscula para designar uma realização da variável, ou seja, o valor que ela assume em um experimento (ex: “x”).

2.4. Funções de variáveis aleatórias

Muitas vezes é interessante representar uma variável aleatória por meio de uma função contínua. Esta função é chamada de função densidade de probabilidade. Uma função densidade de probabilidade deve atender aos seguintes requisitos (HART, 1982):

- I) A função densidade de probabilidade é sempre maior ou igual à zero, isto é,
 $f_X(x) \geq 0$ para qualquer valor de x ;
- II) A área abaixo da curva da função densidade de probabilidade deve ser unitária, ou seja

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1; \quad (2-6)$$

III) A probabilidade de um valor observado ser menor ou igual a x_0 é dada por:

$$F_X(x_0) \equiv P(X \leq x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f_X(x) dx. \quad (2-7)$$

Apesar do fato de que qualquer função que atenda aos requisitos mencionados possa ser utilizada, é comum que se utilizem alguns tipos predefinidos dessas funções. Algumas dessas funções são apresentadas no item 2.7.

Da expressão (2-7), pode-se notar que, como a função é contínua, incluir ou não o extremo x_0 não alterará o resultado. A integral do lado direito da equação (2-7) é chamada de função de distribuição acumulada (ou função cumulativa de distribuição). A probabilidade de um valor observado situar-se entre dois valores, a e b , é dada por

$$P(a \leq X \leq b) = \int_{-\infty}^b f_X(x) dx - \int_{-\infty}^a f_X(x) dx. \quad (2-8)$$

A expressão acima também pode ser escrita como

$$P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a). \quad (2-9)$$

A função de distribuição acumulada tem algumas propriedades:

- I) $F_X(-\infty) = 0$;
- II) $F_X(+\infty) = 1$;
- III) $F_X(x) \geq 0$.

A função densidade de probabilidade também é chamada de PDF (“*Probability Density Function*”) e a função de densidade acumulada de CDF (“*Cumulative Distribution Function*”).

2.5. Momentos de variáveis aleatórias

2.5.1. Média

A média é o principal número utilizado para representar uma série de valores. Para o caso de variáveis discretas, a média pode ser calculada como a soma dos valores observados dividida pelo número total de observações, como na equação (2-10):

$$\mu_X = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i, \quad (2-10)$$

onde n é o número de observações e x_i é o valor da variável na observação i . Já para o caso de variáveis contínuas, a média pode ser calculada pela expressão

$$\mu_X = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) dx. \quad (2-11)$$

A média também pode ser chamada de valor esperado ou de primeiro momento da variável aleatória (MELCHERS, 1999).

2.5.2. Variância e desvio padrão

A variância e o desvio padrão são medidas da dispersão dos valores da variável aleatória, ou seja, eles medem quanto os valores observados variam em torno da média. Para o caso de variáveis discretas, a variância é dada pela seguinte expressão:

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)^2. \quad (2-12)$$

Quando se analisa amostras de uma população, é comum utilizar o denominador $n - 1$ em vez de n no cálculo da variância. A justificativa pode ser encontrada em BENJAMIN e CORNELL (1970). Para o caso de variáveis contínuas, a expressão da variância é dada por:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 \cdot f_X(x) dx. \quad (2-13)$$

O desvio padrão é simplesmente a raiz quadrada positiva da variância:

$$\sigma_X = +\sqrt{\sigma_X^2}. \quad (2-14)$$

A variância também é chamada de segundo momento central da variável aleatória. A variância e o desvio padrão possuem unidades. Por exemplo, se a variável estudada for uma força, com unidade em kN, o desvio padrão também terá unidade de kN e a variância terá unidade de kN².

Na figura 2-1, é apresentado um gráfico para ilustrar o conceito de desvio padrão e de variância.

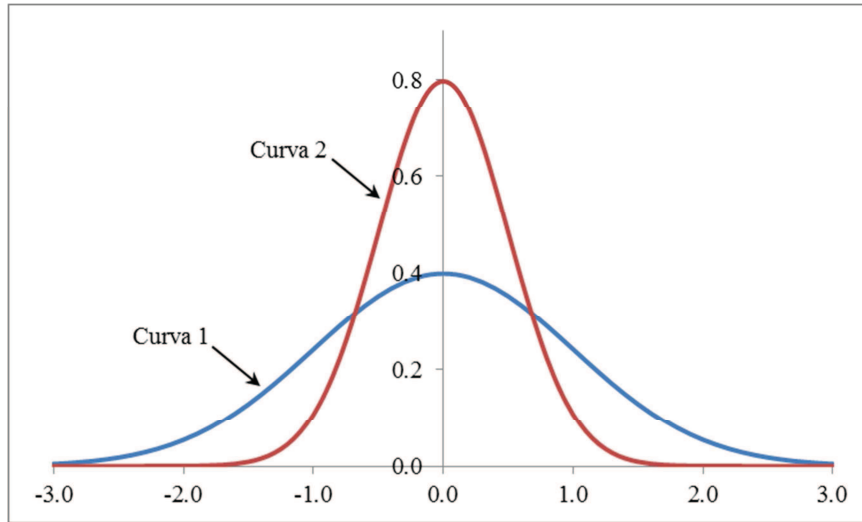


Figura 2-1 – Ilustração do conceito de desvio padrão e variância

Pode-se perceber que a curva 1 apresenta valores mais dispersos em relação à média, enquanto a curva 2 apresenta valores mais próximos da média. Por esse motivo, o desvio padrão e a variância da curva 1 são maiores do que os valores da curva 2.

Outra forma de se representar a dispersão de valores é pelo coeficiente de variação. Ele é definido como

$$\delta_X = \frac{\sigma_X}{\mu_X}, \quad (2-15)$$

onde μ_X é a média e σ_X é o desvio padrão. Pode-se perceber que o coeficiente de variação é adimensional.

2.5.3. Outros momentos

Outro valor que pode ser utilizado para caracterizar uma variável aleatória é chamado de coeficiente de *skewness*, que é o terceiro momento central adimensionalizado. Para o caso de variáveis discretas, ele é dado pela expressão

$$\theta_1 = \frac{1}{n \cdot (\sigma_X)^3} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)^3. \quad (2-16)$$

Já para variáveis contínuas, a expressão é

$$\theta_1 = \frac{1}{(\sigma_X)^3} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^3 \cdot f_X(x) dx. \quad (2-17)$$

Este parâmetro pode ser usado para medir a simetria ou a assimetria de uma variável aleatória em torno da sua média. Se o coeficiente for nulo, a função é simétrica. Valores positivos deste coeficiente indicam que valores da variável aleatória X maiores do que a média são mais dispersos do que os valores menores, e valores negativos indicam o contrário (LIMA; SAGRILO, 2004).

O quarto momento central adimensionalizado é chamado de coeficiente de *kurtosis*. Para variáveis discretas, ele é dado pela expressão

$$\theta_2 = \frac{1}{n \cdot (\sigma_X)^4} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)^4 \quad (2-18)$$

e, para variáveis contínuas, por

$$\theta_2 = \frac{1}{(\sigma_X)^4} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^4 \cdot f_X(x) dx . \quad (2-19)$$

Ele mede a suavidade da curva, ou seja, quanto maior o seu valor, menos acentuado será o pico da curva (LIMA; SAGRILO, 2004).

Momentos de graus maiores também podem ser utilizados, porém os quatro primeiros são os mais comuns na prática. Os coeficientes de *skewness* e de *kurtosis* podem ajudar na escolha de distribuições aleatórias para uma variável (LIMA; SAGRILO, 2004).

O conjunto de todos os momentos de uma função de densidade de probabilidade descreve completamente a função (MELCHERS, 1999). Porém, para algumas distribuições específicas, um número pequeno de momentos é suficiente. A distribuição normal (ver item 2.7), por exemplo, fica completamente caracterizada com os dois primeiros momentos: média e desvio padrão.

2.6. Associação entre duas variáveis aleatórias

Às vezes, duas variáveis podem estar associadas, ou seja, elas podem apresentar um grau de dependência. Esta associação pode ser medida por alguns parâmetros, sendo um deles a covariância. A covariância, para variáveis discretas, é dada pela expressão

$$COV(X_1, X_2) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_{1i} - \mu_{X_1}) \cdot (x_{2i} - \mu_{X_2}) . \quad (2-20)$$

E para variáveis contínuas

$$COV(X_1, X_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \mu_{X_1}) \cdot (x_2 - \mu_{X_2}) \cdot f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \quad (2-21)$$

Pode-se perceber que a covariância tem a mesma dimensão da variância. A sua forma adimensional é chamada de coeficiente de correlação e é dada pela expressão

$$\rho_{X_1 X_2} = \frac{COV(X_1, X_2)}{\sigma_{X_1} \cdot \sigma_{X_2}}, \quad (2-22)$$

onde σ_{X_1} e σ_{X_2} são o desvio padrão da variável X_1 e o desvio padrão da variável X_2 , respectivamente. O coeficiente de correlação apresenta valores dentro do intervalo $-1 \leq \rho \leq 1$.

Quando ρ vale 1, pode-se dizer que as variáveis são linearmente dependentes e que quando o valor de uma cresce, o valor da outra também cresce. Quando ρ vale -1, as variáveis também são linearmente dependentes, porém quando o valor de uma cresce, o da outra diminui.

Se o valor de ρ for nulo, as variáveis não são linearmente dependentes. Elas podem, entretanto, apresentar outra forma de dependência. Na figura 2-2, são apresentados diversos gráficos para ilustrar o conceito do coeficiente de correlação.

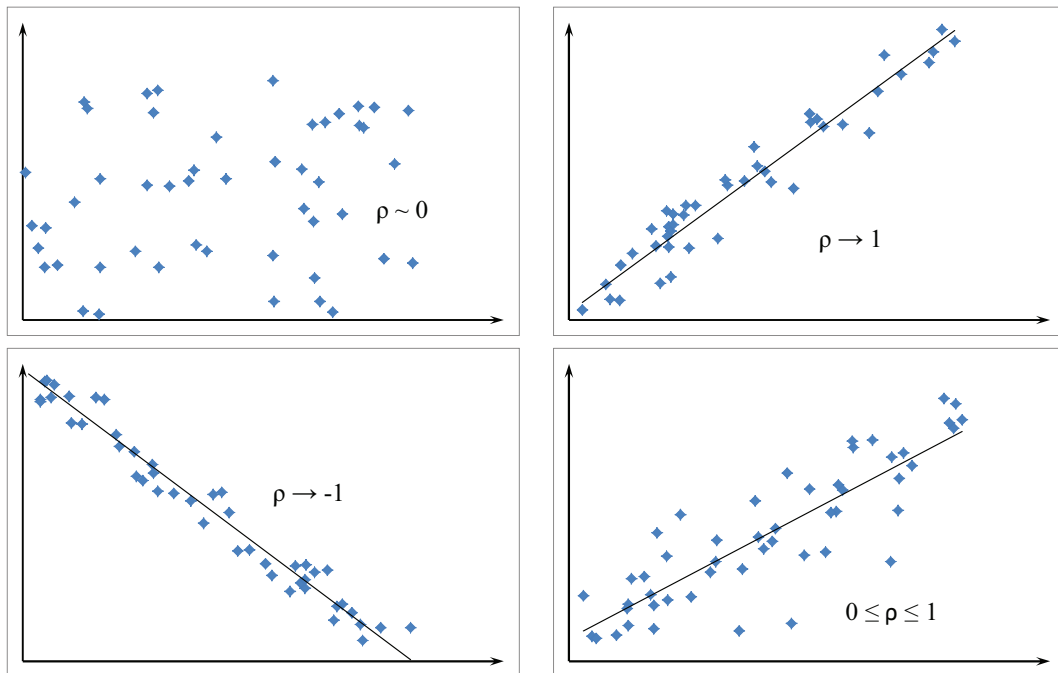


Figura 2-2 – Dependência linear entre variáveis aleatórias

Neste trabalho serão utilizadas somente variáveis independentes ou que apresentem um grau de dependência pequeno, que pode ser desprezado.

2.7. Distribuições aleatórias contínuas

Neste item serão apresentadas algumas distribuições aleatórias contínuas, com as suas respectivas funções densidade de probabilidade, funções cumulativas de distribuição e os seus principais parâmetros.

2.7.1. Uniforme ou retangular

A função densidade de probabilidade da distribuição uniforme é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{b - a}, \quad (2-23)$$

para $a \leq x \leq b$. Para os demais valores, $f(x) = 0$. A média da distribuição é

$$\mu = \frac{a + b}{2} \quad (2-24)$$

e a variância é

$$\sigma^2 = \frac{(b - a)^2}{12}. \quad (2-25)$$

Na figura 2-3 é apresentada a curva de função densidade de probabilidade para uma variável com distribuição uniforme.

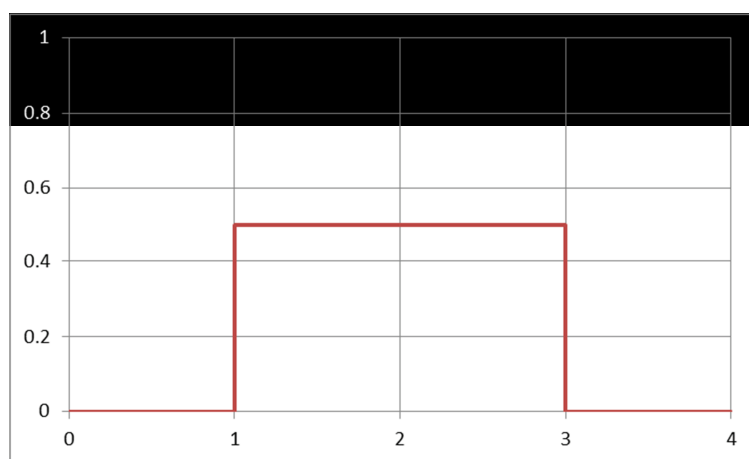


Figura 2-3 – Função densidade de variável com distribuição uniforme

Pode-se perceber que os parâmetros dessa função são $a = 1$ e $b = 3$. A média da distribuição é $\mu = 2$ e a variância é $\sigma^2 = 0,333$. A curva da função cumulativa de distribuição para a mesma variável é apresentada na figura 2-4.

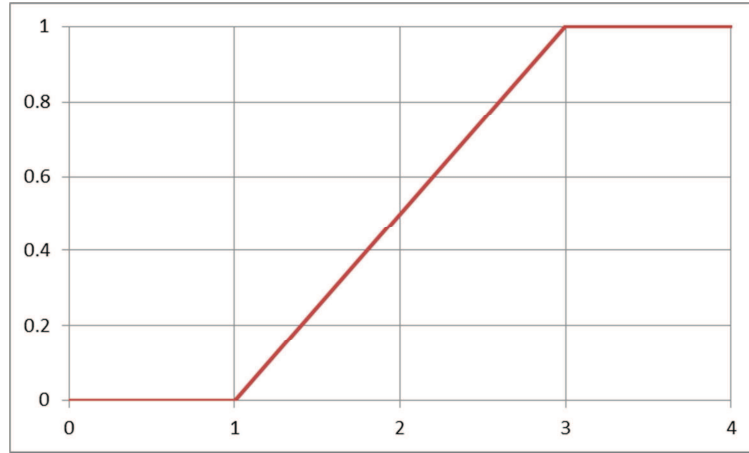


Figura 2-4 – Função cumulativa de variável com distribuição uniforme

Pode-se verificar que ela vale zero quando $x \leq 1$ e que ela vale 1 quando $x \geq 3$. Para $1 \leq x \leq 3$, ela cresce linearmente.

2.7.2. Normal

A distribuição normal, ou Gaussiana, é uma distribuição que aparece com muita frequência para representar fenômenos físicos. A sua função densidade de probabilidade é dada pela expressão

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right], \quad (2-26)$$

onde μ é a média da distribuição e σ é o desvio padrão. A função de distribuição acumulada não tem uma expressão na forma analítica. Ela é definida como

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right] dx. \quad (2-27)$$

Na prática, é comum utilizar a função normal padrão, que tem desvio padrão unitário e média igual a zero. Assim, a função densidade de probabilidade tem a forma

$$f(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{1}{2} s^2 \right) \quad (2-28)$$

e a função de distribuição acumulada é dada por

$$F(s) = \int_{-\infty}^s \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}s^2\right) ds. \quad (2-29)$$

Os valores da função de distribuição acumulada estão tabelados no anexo A e podem ser encontrados na literatura técnica, como em BUSSAB e MORETTIN (2004). A transformação de uma distribuição normal qualquer para uma distribuição normal padrão pode ser feita por meio de uma mudança de variável:

$$s = \frac{(x - \mu_X)}{\sigma_X}. \quad (2-30)$$

A função densidade de probabilidade normal padrão é comumente designada como

$$\phi(s) = f_s(s) \quad (2-31)$$

e a função cumulativa normal padrão é designada como

$$\Phi(s) = F_s(s). \quad (2-32)$$

A função de distribuição acumulada normal padrão pode ser calculada por uma série infinita. Há também algumas funções aproximadas para o cálculo da função acumulada em um determinado ponto. Para mais detalhes, consultar MELCHERS (1999).

O coeficiente de *skewness* vale $\theta_1 = 0$, o que indica que a função é simétrica em relação à média, e o coeficiente de *kurtosis* vale $\theta_2 = 3$. Na figura 2-5, são apresentadas curvas de funções densidade de probabilidade de variáveis com distribuição normal, média igual a zero e diferentes valores de desvio padrão. Na figura 2-6, é possível ver as curvas das funções de distribuição acumulada função acumulada das mesmas variáveis.

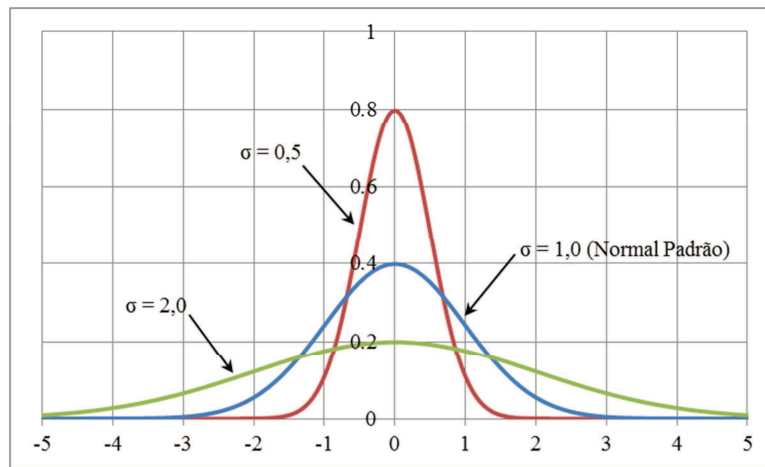


Figura 2-5 – Função de densidade de variáveis com distribuição normal

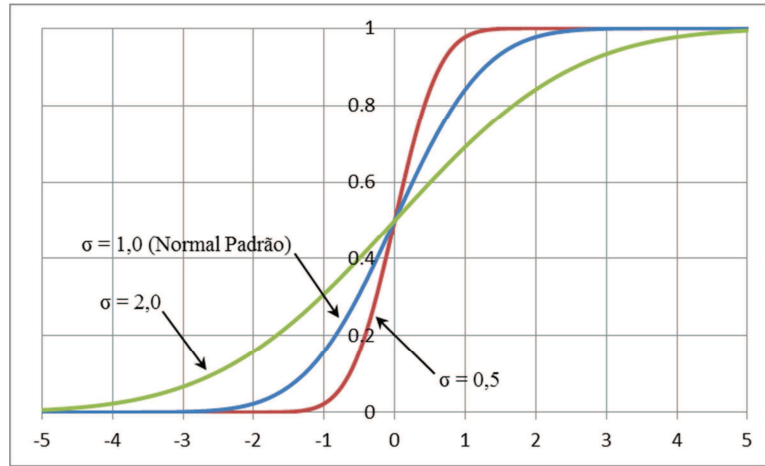


Figura 2-6 – Funções cumulativas de variáveis com distribuição normal

O Teorema do Limite Central afirma que a distribuição de probabilidade da soma de um grande número de variáveis aleatórias, independentemente da distribuição dessas variáveis, aproxima-se da distribuição normal (MELCHERS, 1999).

A função normal pode ser utilizada para representar as incertezas das dimensões de elementos estruturais, como a largura de uma viga ou a posição da armadura. Nestes casos, deve-se ficar atento para que o valor não seja negativo.

2.7.3. Lognormal

Na distribuição lognormal, o logaritmo natural da variável aleatória X tem distribuição normal. A função densidade de probabilidade desta distribuição é dada pela expressão

$$f(x) = \frac{1}{a \cdot x \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln x - b}{a} \right)^2 \right], \quad (2-33)$$

para $x \geq 0$ e $a > 0$. A média é dada por

$$\mu = \exp \left(b + \frac{a^2}{2} \right) \quad (2-34)$$

e a variância por

$$\sigma^2 = \exp(2b + a^2) \cdot [\exp(a^2) - 1]. \quad (2-35)$$

A função cumulativa da distribuição lognormal, assim como a função cumulativa da distribuição normal, não possui uma expressão na forma analítica. Na figura 2-7, são apresentadas curvas de funções densidade de probabilidade de variáveis com

distribuição lognormal, $b = 0$ e diferentes valores de a . Na figura 2-8, é possível ver as curvas das funções cumulativas de distribuição das mesmas variáveis.

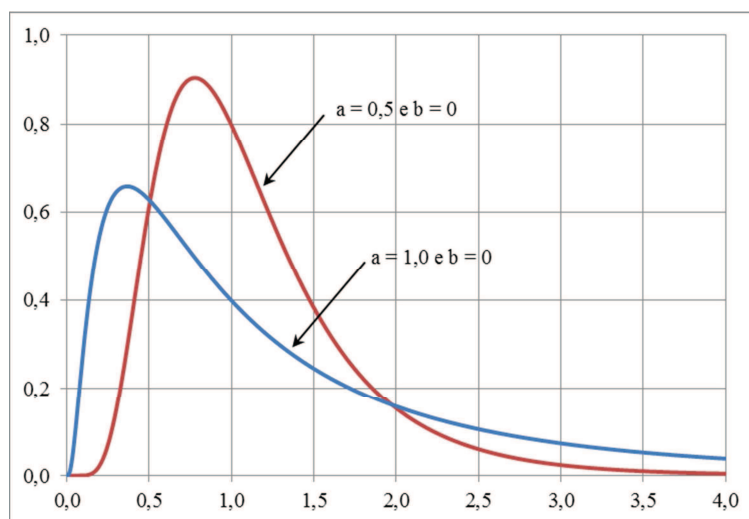


Figura 2-7 – Funções densidade de variáveis com distribuição lognormal

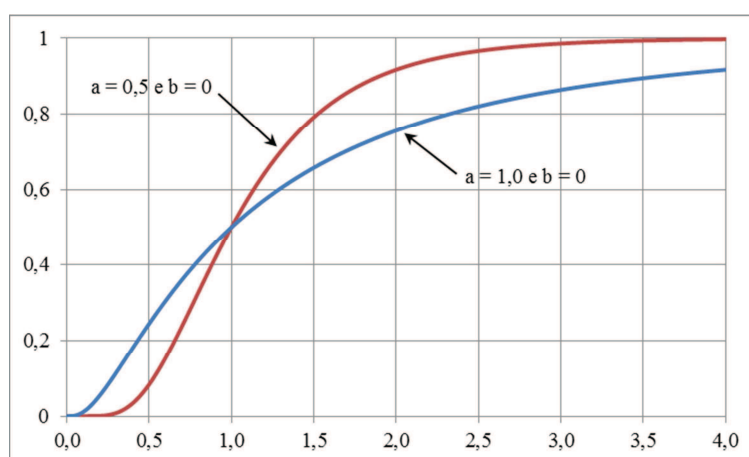


Figura 2-8 – Funções cumulativas de variáveis com distribuição lognormal

A distribuição lognormal é, às vezes, utilizada para representar a resistência do concreto à compressão e a tensão de escoamento do aço, já que essas grandezas não podem assumir valores negativos.

2.7.4. Gumbel

A distribuição de Gumbel é uma distribuição de valores extremos. As distribuições de valores extremos são utilizadas quando se está interessado nos valores mínimos ou máximos da ocorrência de um fenômeno. Por exemplo, a maior velocidade do vento em um ano pode ser representada por uma distribuição do tipo Gumbel. A sua função densidade de probabilidade é dada pela expressão

$$f(x) = a \cdot \exp\{-a \cdot (x - b) - \exp[-a \cdot (x - u)]\} \quad (2-36)$$

e a função cumulativa de probabilidade é dada por

$$F(x) = \exp\{-\exp[-a(x - b)]\}. \quad (2-37)$$

A média é dada por

$$\mu = b + \frac{\gamma}{a}, \quad (2-38)$$

onde $\gamma = 0.57721566$ é a constante de Euler, e a variância é dada por

$$\sigma^2 = \frac{\pi^2}{6 \cdot a^2}. \quad (2-39)$$

Na figura 2-9, são apresentadas curvas de funções densidade de probabilidade de variáveis com distribuição do tipo Gumbel. As curvas das funções acumuladas de distribuição das mesmas variáveis são apresentadas na figura 2-10.

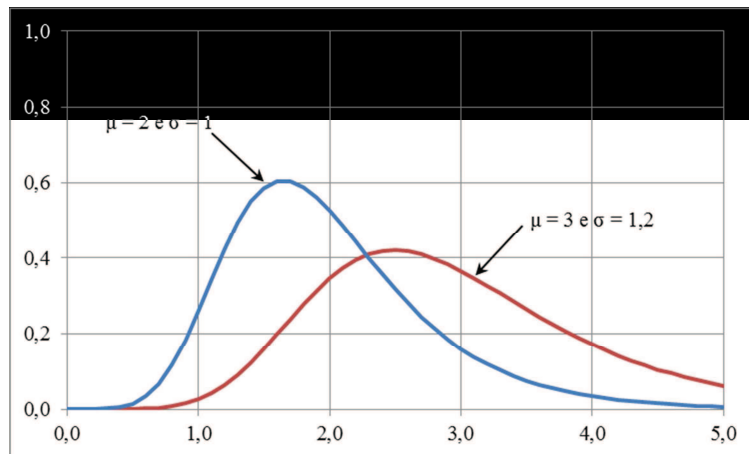


Figura 2-9 – Funções densidade de variáveis com distribuição Gumbel

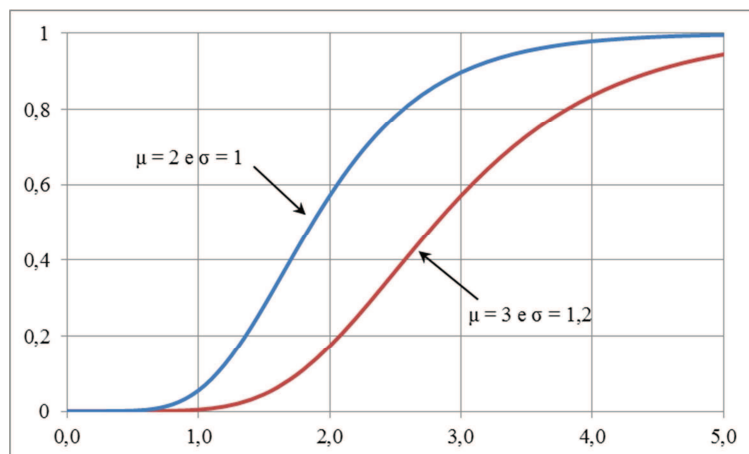


Figura 2-10 – Funções cumulativas de variáveis com distribuição Gumbel

3. CONCEITOS DE CONFIABILIDADE

3.1. Introdução

A análise de confiabilidade permite que se considere a incerteza associada a cada uma das variáveis que influem no desempenho ou na segurança da estrutura. Desta forma, podem-se considerar as incertezas associadas às dimensões do elemento estrutural, as incertezas na resistência dos materiais e as incertezas nas solicitações, para citar algumas.

Em uma análise de confiabilidade, estuda-se a probabilidade de uma estrutura ou de um elemento estrutural sofrer algum tipo de falha. A falha pode ser definida como a situação em que a estrutura atinge uma condição indesejada, o que não representa necessariamente o colapso da totalidade ou parte da estrutura. Ela pode ser também o surgimento de uma flecha ou uma abertura de fissura maior do que o esperado.

Cada uma das situações em que se deseja verificar a probabilidade de falha será chamada de modo de comportamento. Neste trabalho, por exemplo, só serão estudados os modos de comportamento relacionados com a ruptura de elementos à flexão (simples ou composta).

Uma das formas de calcular a probabilidade de falha para um modo de comportamento é pelo estabelecimento de uma função de falha. Quando esta função é igualada à zero, tem-se a equação da falha. A equação da falha descreve a situação que separa o lado “seguro” do lado “não seguro”, ou do funcionamento adequado do funcionamento indesejado. Na maior parte das vezes, a função de falha para um modo de comportamento pode ser escrita na forma de resistência menos solicitação

$$G(\mathbf{X}) = R(\mathbf{X}) - S(\mathbf{X}), \quad (3-1)$$

onde \mathbf{X} é o vetor das variáveis básicas.

3.2. Variáveis básicas

Segundo MELCHERS (1999), variáveis básicas são as variáveis fundamentais que definem e caracterizam o comportamento e a segurança de uma estrutura para um modo de comportamento. Em geral, elas são as mesmas variáveis empregadas no dimensionamento, como as dimensões do elemento, o peso específico do material e a resistência do material.

Não é necessário que as variáveis básicas sejam independentes entre si, apesar de ser preferível que sejam, visto que a dependência entre as variáveis aumenta a complexidade do problema. Se houver algum grau de dependência significativo entre as variáveis, é necessário que essa dependência seja considerada no problema; se a dependência entre as variáveis for pequena, essa dependência pode ser desprezada.

3.3. Índice de confiabilidade

O índice de confiabilidade é um parâmetro de referência utilizado com a intenção de expressar a segurança de uma estrutura (ou elemento estrutural) para um modo de comportamento. Definindo-se uma nova variável aleatória Z

$$Z \equiv G = R - S, \quad (3-2)$$

o índice de confiabilidade será dado por

$$\beta \equiv \frac{\mu_Z}{\sigma_Z}, \quad (3-3)$$

onde μ_Z é a média e σ_Z é o desvio padrão da variável associada à função de falha G . O índice de confiabilidade pode ser interpretado como a distância entre o valor médio de Z e a falha, medida em unidades de desvio padrão, como ilustrado na figura 3-1. É usual considerar essa definição mesmo quando a variável Z tem distribuição diferente da normal. Quanto maior o índice de confiabilidade da estrutura, maior tende ser a sua segurança, ou seja, menor a probabilidade de falha. Isto indica que quanto maior a média e menor o desvio padrão da função de falha, melhor é a situação da estrutura.

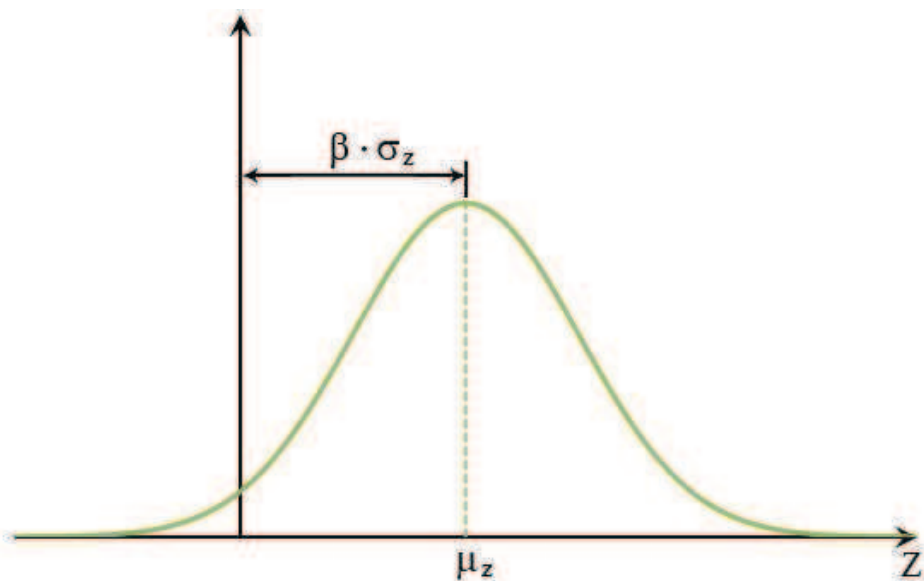


Figura 3-1 – Índice de confiabilidade

Se a variável associada à função de falha apresentar uma distribuição normal, a probabilidade de falha será dada pela expressão

$$p_f = \Phi(-\beta), \quad (3-4)$$

onde $\Phi()$ é a função cumulativa de distribuição normal padrão (ver item 2.7.2). Como na maioria dos casos a variável associada à função de falha não apresenta distribuição normal, a expressão acima pode fornecer uma probabilidade de falha bem diferente do valor verdadeiro.

Além disso, para uma variável associada a uma função de falha qualquer, a média e o desvio padrão podem não ser suficientes para representar com precisão a distribuição dessa função. Assim, não necessariamente a variável que tiver maior média e menor desvio padrão será a que tem a menor probabilidade de falha. É necessário também considerar os outros momentos da função.

Devido à dificuldade de se determinar com precisão a probabilidade de falha das estruturas, o índice de confiabilidade é um parâmetro de referência utilizado com frequência para se medir a segurança das estruturas.

3.4. Definição do tipo de distribuição e seus parâmetros

A definição do tipo de distribuição e dos parâmetros de uma variável aleatória depende do conhecimento que se tem desta variável. Ela pode ser feita com base nos métodos descritos a seguir, que podem ser utilizados conjuntamente ou isoladamente.

a) Ajuste de funções aos dados observados

Com os parâmetros da amostra calculados (de acordo com as expressões apresentadas no item 2.5), pode-se compará-los com os parâmetros da distribuição considerada. Como parâmetros podem ser considerados a média, o desvio padrão, o coeficiente de *skewness*, coeficiente de *kurtosis* e outros momentos.

Pode-se também testar uma distribuição graficamente. Isto pode ser feito comparando o histograma da amostra com a função densidade de probabilidade ou por meio de papéis de probabilidade. Mais detalhes podem ser encontrados em BENJAMIN e CORNELL (1970) e BUSSAB e MORETTIN (2004).

b) Recomendações de normas ou publicações relevantes

Algumas distribuições e parâmetros podem ser inferidos a partir da definição dos valores característicos (de solicitações ou resistências) das normas técnicas. Pode-se também utilizar distribuições recomendadas ou utilizadas em publicações relevantes, como apresentadas em *Probabilistic Model Code* (JCSS, 2006), HOLICKÝ e SYKORA (2011) e STUCCHI e SANTOS (2011).

c) Por raciocínio físico

Esta forma é baseada nos conceitos de probabilidade e estatística. Por exemplo, quando uma variável aleatória é constituída pela soma de um grande número de variáveis, pode-se adotar o recurso do teorema do limite central e considerar a variável com distribuição normal. Da mesma forma, se a variável consiste do produto de um grande número de variáveis aleatórias, a sua distribuição aproxima-se da lognormal (MELCHERS, 1999).

Outros exemplos podem ser dados:

- Quando se sabe que uma variável não pode assumir valores negativos e, por esse motivo, deseja-se escolher uma distribuição que reflita este fato;
- Quando uma variável representa os valores máximos ou mínimos de um fenômeno, pode-se escolher uma distribuição de valores extremos.

Neste trabalho será utilizada basicamente a abordagem descrita na letra b.

3.5. *Problema básico*

Para ilustrar um problema básico de confiabilidade, será considerada a forma mais simples da função de falha:

$$Z \equiv G = R - S . \quad (3-5)$$

As variáveis da resistência, R , e da solicitação, S , são independentes entre si e possuem distribuição normal. Neste caso, a integração direta pode ser utilizada. A média é dada por

$$\mu_Z = \mu_R - \mu_S \quad (3-6)$$

e o desvio padrão é dado por

$$\sigma_Z = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}, \quad (3-7)$$

onde:

- μ_R e μ_S são as médias das variáveis R e S , respectivamente;
- σ_R e σ_S são os desvios padrões das variáveis R e S , respectivamente.

Considerando que a variável aleatória R tem média $\mu_R = 15$ e desvio padrão $\sigma_R = 1,5$ e que a variável aleatória S tem média $\mu_S = 10$ e desvio padrão $\sigma_S = 2$, pode-se chegar aos seguintes valores dos parâmetros da variável Z :

$$\mu_Z = 15 - 10 = 5 \quad (3-8)$$

$$\sigma_Z = \sqrt{1,5^2 + 2,0^2} = 2,5 \quad (3-9)$$

A figura 3-2 apresenta o gráfico das funções densidade de probabilidade das variáveis aleatórias Z , R e S .

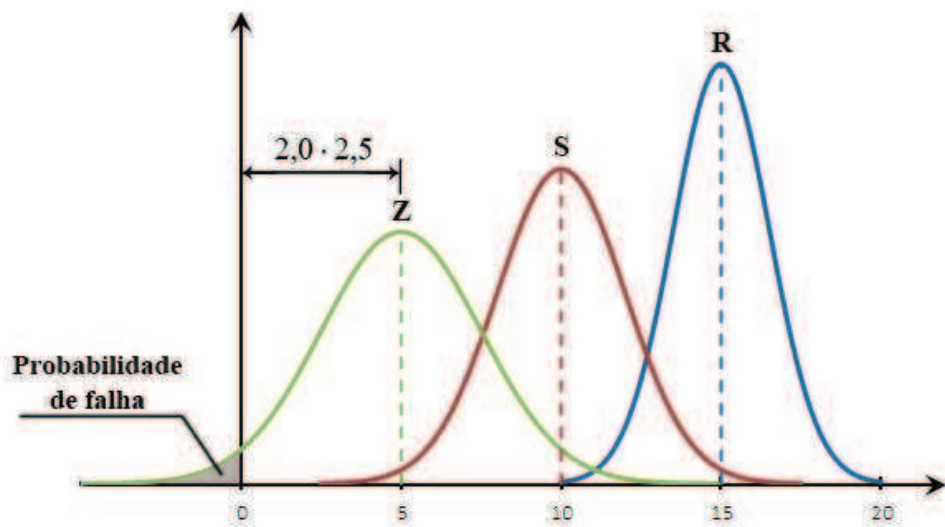


Figura 3-2 – Curvas das funções densidade de probabilidade das variáveis Z , R e S

O índice de confiabilidade vale

$$\beta = \frac{5}{2,5} = 2,0 \quad (3-10)$$

e a probabilidade de falha pode ser obtida pela tabela do Anexo A

$$p_f = \Phi(-2,0) = 0,0228 = 2,28\%, \quad (3-11)$$

que corresponde a área marcada na figura 3-2.

O problema apresentado é dito problema básico de confiabilidade. Nos problemas usuais, as funções de falha quase sempre são não lineares, com um grau de complexidade maior do que o das funções apresentadas neste item. Além disso, nem sempre as variáveis apresentam distribuição normal.

No tópico a seguir, são apresentadas outras formas de resolver um problema de confiabilidade, que poderão ser utilizadas em problemas gerais.

3.6. Métodos de Análise

A análise de confiabilidade consiste basicamente na avaliação da probabilidade de falha, dada pela expressão:

$$p_f = P[G(\mathbf{X}) < 0] = \int \dots \int_{G(\mathbf{X}) < 0} f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (3-12)$$

Segundo MELCHERS (1999), há essencialmente três formas que podem ser utilizadas para calcular esta integral:

- I) integração direta;
- II) transformar o integrando em uma distribuição normal multivariada;
- III) utilizando simulação numérica.

A primeira forma, utilizada no exemplo do item 3.5, como foi visto, só pode ser utilizada em casos especiais, quando é possível obter uma solução analítica para a integral. Para funções de falha complexas, a sua aplicação torna-se inviável. A segunda forma de resolução é a base para os métodos do FORM (“*First Order Reliability Method*”) e SORM (“*Second Order Reliability Method*”). A terceira e última forma pode ser usada sem restrições, sendo a mais comum a simulação de Monte Carlo.

Mais detalhes sobre as duas primeiras formas podem ser encontrados em MELCHERS (1999) e CHOI et. al. (2007). A seguir, será apresentado o método de Monte Carlo, utilizado nos exemplos numéricos deste trabalho.

3.7. Método de Monte Carlo

O método de Monte Carlo é um método numérico. Os métodos numéricos, de forma geral, podem ser usados para qualquer forma de função (linear ou não linear) e as distribuições podem ser de qualquer tipo (normal, lognormal, Gumbel, etc.). A

expressão (3-12) pode, portanto, ser avaliada por métodos de integração conhecidos nas disciplinas de cálculo, como o método dos trapézios e o método de Simpson.

A grande desvantagem destes métodos é a grande demanda computacional quando o número de variáveis torna-se grande. Segundo MELCHERS (1999), quando o número de variáveis é maior do que cinco, o processamento torna-se demasiadamente lento. Neste caso, recomenda-se a utilização de métodos numéricos aproximados, como o método de Monte Carlo e os seus derivados.

Os procedimentos utilizados para resolver um problema pelo Método de Monte Carlo serão explicados a seguir. Porém, antes de empregar o método, é necessário definir o problema que será estudado.

3.7.1. Definição do problema

O primeiro passo para definir o problema consiste em estabelecer a função de falha para o modo de comportamento estudado. O método de Monte Carlo permite estudar mais de um modo de comportamento ao mesmo tempo, mas este caso não será abordado neste trabalho.

Após a definição da função de falha, deve-se definir o tipo de distribuição e os parâmetros de cada variável aleatória envolvida na análise. Neste trabalho, como mencionado no item 3.4, serão utilizados os tipos de distribuição e parâmetros recomendados por normas e publicações relevantes.

A escolha do número de amostras que será utilizado também é muito importante, visto que o método de Monte Carlo é um método numérico e aproximado. Mais informações sobre a escolha do número de amostras são apresentadas no item 3.7.4.

Após a definição do problema, é possível realizar a simulação de Monte Carlo.

3.7.2. Procedimentos de resolução

O método de Monte Carlo irá calcular a função de falha N vezes, onde N é o número de simulações estabelecido. Para que a expressão da função de falha seja avaliada, é necessário, primeiramente, gerar os valores das variáveis aleatórias em cada uma das simulações.

Esses valores são gerados de acordo com o tipo de distribuição e os parâmetros das variáveis. Como o número de simulações costuma ser muito grande, geralmente não é

viável, do ponto de vista computacional, armazenar os valores das variáveis gerados em cada simulação. Contudo, em alguns casos, pode ser possível armazenar somente o resultado de cada simulação.

Há várias formas de se gerar um valor para uma variável aleatória. A maioria delas utiliza, como ponto de partida, números pseudoaleatórios gerados no intervalo $(0,1)$, com iguais probabilidades de ocorrência, isto é, estes números têm distribuição uniforme, com parâmetros $a = 0$, $b = 1$ e média $\mu_x = 0,5$.

Os números pseudoaleatórios são assim chamados porque, na verdade, são gerados por funções e se repetem após um ciclo, que se espera que seja longo. Testes realizados indicam que uma sequência de números aleatórios é indistinguível de uma sequência de números realmente aleatórios (MELCHERS, 1999, p. 67 apud RUBINSTEIN, 1981).

A partir dos números pseudoaleatórios gerados é possível gerar os valores das variáveis aleatórias, em função do tipo de distribuição e dos seus parâmetros. O meio mais comum de fazer isso é pelo método da transformação inversa.

O método da transformação inversa baseia-se na definição da teoria da probabilidade de que os valores da função de distribuição acumulada situam-se no intervalo $[0,1]$ (ver item 2.4). Assim, o método consiste em encontrar o valor da realização da variável X , tal que a probabilidade de se obter um valor menor ou igual a ele seja igual ao número pseudoaleatório gerado no intervalo $(0,1)$, com distribuição uniforme.

Cabe ressaltar que quase sempre é conveniente que o número pseudoaleatório seja gerado no intervalo aberto $(0,1)$, visto que em muitos casos não é possível obter um valor para a realização de uma variável X quando $F_X(x) = 0$ ou quando $F_X(x) = 1$. Por exemplo, no caso de uma variável com distribuição normal, o valor da realização da variável seria $x = -\infty$ para o primeiro caso e $x = +\infty$ para o segundo.

Para ilustrar o método da transformação inversa, será apresentado um breve exemplo. Considere que se deseje gerar um valor para uma variável aleatória com distribuição do tipo Gumbel, com média $\mu = 2$ e desvio padrão $\sigma = 1$. A expressão da função de distribuição acumulada do tipo Gumbel é dada pela expressão (2-37). Invertendo-se esta expressão chega-se à:

$$x = b - \frac{\ln\{-\ln[F(x)]\}}{a} \quad (3-13)$$

Utilizando as fórmulas (2-38) e (2-39), pode-se obter os valores dos parâmetros a e b .

$$a = \frac{\sqrt{6} \cdot \pi}{6 \cdot \sigma} = 1,283 \quad (3-14)$$

$$b = \mu - \frac{\gamma}{a} = 1,550 \quad (3-15)$$

Considerando que o número pseudoaleatório r gerado seja

$$r = F(x) = 0,640, \quad (3-16)$$

então, o valor da realização da variável X será

$$x = 2,179. \quad (3-17)$$

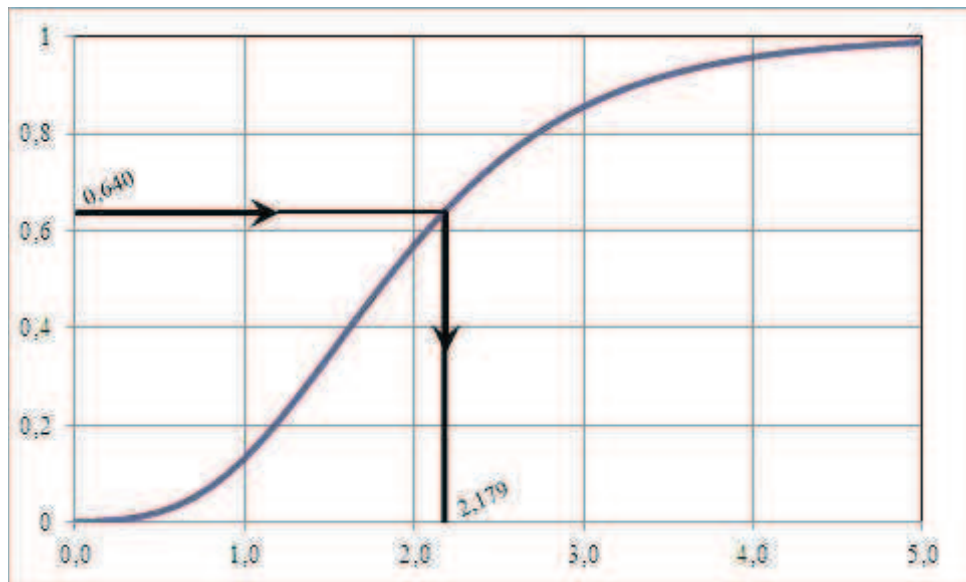


Figura 3-3 - Método da transformação inversa

O método da transformação inversa é ilustrado na figura 3-3. A aplicação do método é fácil quando se tem uma expressão analítica da função de distribuição acumulada, como é o caso das distribuições uniforme e Gumbel. No caso da distribuição normal, que não apresenta uma expressão analítica para a inversa da função de distribuição acumulada, é possível chegar ao valor da realização de uma variável normal padrão por meio de séries ou de fórmulas aproximadas. Podem-se gerar valores para duas variáveis normais padrões e independentes, por exemplo, utilizando as fórmulas

$$u_1 = \sqrt{-2 \cdot \ln(r_1)} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot r_2) \quad e \quad (3-18)$$

$$u_2 = \sqrt{-2 \cdot \ln(r_1)} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot r_2), \quad (3-19)$$

onde r_1 e r_2 são realizações de variáveis uniformes e independentes no intervalo (0,1). O valor da realização de uma variável normal qualquer pode ser encontrado utilizando a fórmula (3-20), que é obtida a partir da expressão (2-30).

$$x = \mu + \sigma \cdot u \quad (3-20)$$

Após a geração dos valores pseudoaleatórios para cada uma das variáveis, esses valores são substituídos na função de falha. Se o resultado da expressão (3-5) for um número menor do que zero, pode-se dizer que ocorreu uma falha e esta informação deve ser guardada. A geração dos valores de cada uma das variáveis aleatórias, a substituição desses valores na função de falha e a avaliação do resultado são repetidas N vezes.

A probabilidade de falha estimada será, então, dada por

$$p_f = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N I[G(\mathbf{X}) \leq 0], \quad (3-21)$$

onde:

- N é o número de simulações realizadas;
- $I[]$ é um operador que vale 1 quando a expressão é verdadeira, ou seja, quando $G(\mathbf{X} \leq 0)$, e vale 0 em caso contrário.

Assim, considerando que o número de simulações realizadas pelo método é $N = 1000$ e que ocorreu uma falha 21 vezes, a probabilidade de falha será

$$p_f = \frac{21}{1000} = 0,021 = 2,1\%. \quad (3-22)$$

Como o método de Monte Carlo é um método numérico (e aproximado), o número de simulações que serão utilizadas é um fator importante. Quanto menor a probabilidade de falha, maior deve ser o número de “experimentos” realizados, para que essa probabilidade de falha possa ser estimada com precisão.

O método de Monte Carlo era considerado como um método que necessitava de grande poder computacional, pois demandava um tempo relativamente grande para que fosse processado. Isso tem mudado com o aumento da capacidade e velocidade de processamento dos computadores.

3.7.3. Exemplo do método

Para exemplificar o método de Monte Carlo, o procedimento será aplicado na solução do exemplo do item 3.5. Os resultados são apresentados no anexo B. Por simplicidade, foram feitas somente 200 simulações.

A função de falha é dada pela expressão (3-5). A variável R tem distribuição normal com média $\mu = 15$ e desvio padrão $\sigma = 1,5$ e a variável S tem média $\mu = 10$ e desvio padrão $\sigma = 2,0$.

Primeiramente são gerados valores pseudoaleatórios, r_1 e r_2 , com distribuição uniforme no intervalo entre (0,1). Esses valores são então transformados em realizações de variáveis normais padrões, u_1 e u_2 , de acordo com as fórmulas (3-18) e (3-19) e, em seguida, transformados em realizações das variáveis aleatórias R e S , respectivamente, de acordo com a fórmula (3-20).

Assim, para cada simulação é calculado o valor de $G()$. Se $G() \geq 0$, então $I[G()] = 0$; se $G() < 0$, então $I[G()] = 1$. Após o final das repetições, somam-se os valores de $I[G()]$ e divide-se a soma pelo número de simulações para encontrar a probabilidade de falha. Retomam-se os valores de $G()$ em cada simulação e calcula-se a média e o desvio padrão. A tabela 3-1 resume os resultados encontrados.

Tabela 3-1 - Resultados do exemplo pelo Método de Monte Carlo

Solução	Média (μ)	Desvio padrão (σ)	Índice de confiabilidade (β)	Probabilidade de falha (p_f)
Simulação de Monte Carlo ($N = 200$)	4,895	2,419	2,024	0,025
Solução exata	5,0	2,5	2,0	0,0228

Como se pode verificar, os resultados foram ligeiramente diferentes dos valores (exatos) apresentados no item 3.5. Isto decorre, principalmente, do pequeno número de simulações utilizado.

3.7.4. Número de amostras

Há na literatura, algumas expressões que permitem realizar uma estimativa inicial do número de amostras necessárias para se obter uma resposta com razoável precisão. Uma delas é (MELCHERS, 1999, p.71 apud BRODING, 1964)

$$N > \frac{-\ln(1 - C)}{p_f}. \quad (3-23)$$

A descrição dos parâmetros da expressão (3-23) pode ser encontrada na tabela 3-2, junto com alguns valores que podem ser utilizados na estimativa. O valor da probabilidade de falha p_f corresponde a aproximadamente um índice de confiabilidade de 3,8.

Tabela 3-2 – Parâmetros para o cálculo do número de amostras

Parâmetro	Valor	Descrição
p_f	$7 \cdot 10^{-5}$	Probabilidade de falha estimada, $p_f \approx \Phi(-3,8)$
C	0,95	Confiabilidade do resultado

Substituindo os dados da tabela 3-2 na expressão (3-23), chega-se a um número aproximado de 43000 amostras. Cabe ressaltar que o número de amostras a que se referem as equações diz respeito somente a uma variável aleatória. O número de amostras a ser considerado para o estudo da função de falha deve ser de, pelo menos, N vezes o número de variáveis aleatórias (MELCHERS, 1999).

Outras formas de estimar o número de amostras necessárias para se ter um resultado adequado podem ser encontradas em MELCHERS (1999).

3.8. Definição de um risco aceitável

A definição do risco aceitável é uma tarefa bastante difícil. Por um lado a sociedade espera que as estruturas nunca falhem, o que é estatisticamente impossível. Por outro, o critério para definição de um risco aceitável pode não parecer muito científico.

MELCHERS (1999) apresenta duas formas de estabelecer o risco aceitável. Uma das formas é baseada no risco considerado aceitável de outras atividades realizadas pela sociedade. Estas atividades podem ser separadas em duas categorias: uma referente a riscos voluntários e outra referente a riscos involuntários. Há maior aceitação para os riscos voluntários do que para os riscos involuntários. Além disso, a aceitação do risco depende também dos danos em potencial de uma possível falha.

A outra forma é baseada em critérios socioeconômicos. Como exemplo, tem-se a análise do custo-benefício, em que se procura maximizar a relação benefício menos custo:

$$\max(B - C_T), \quad (3-24)$$

onde B é o benefício total e C_T é o custo total do projeto. Cabe ressaltar que a análise do custo-benefício está sujeita a uma qualidade mínima do projeto. Outra possível análise é baseada em funções de utilidade. Entretanto, a formulação dessas funções de utilidade é de grande dificuldade (MELCHERS, 1999).

3.8.1. Valores alvo

Há na bibliografia algumas expressões para se chegar a um valor alvo para a probabilidade nominal de falha da estrutura (ver MELCHERS, 1999). Ela é chamada de nominal porque não considera a influência do fator humano (como erros) e, portanto, não é uma probabilidade real de falha da estrutura. Estas expressões, entretanto, não costumam ser usadas na prática, pois dependem de valores difíceis de serem previstos, como o número médio de pessoas dentro ou nas proximidades da estrutura durante a sua vida útil.

O meio mais comum de se chegar a um valor alvo de probabilidade nominal de falha da estrutura ou elemento estrutural é pela estimativa da probabilidade de falha de elementos dimensionados de acordo com as normas em vigor, desde que seja considerado que estes elementos apresentam uma segurança adequada.

Segundo MELCHERS (1999), o índice de confiabilidade (β), para um período igual à vida útil da estrutura, costuma ficar entre 3,0 e 3,5, para edificações comerciais e residenciais. O *Probabilistic Model Code* (JCSS, 2006) recomenda um valor de 4,2 para um ano de referência.

O Eurocode EN 1990 (CEN, 2001) recomenda um valor do índice de confiabilidade de 4,7 para um ano e de 3,8 para cinquenta anos de referência, para elementos estruturais de edificações residenciais e comerciais. Esses valores do índice de confiabilidade correspondem a uma probabilidade de falha em torno de $1,3 \cdot 10^{-6}$ e $7,2 \cdot 10^{-5}$, respectivamente, considerando que a função de falha tenha uma distribuição aproximadamente normal.

O valor do índice de confiabilidade recomendado pelo Eurocode ($\beta_a = 3,8$), por ser para um período de referência de 50 anos (semelhante à vida útil das estruturas brasileiras) e por se referir ao elemento estrutural (não à estrutura como um todo), é o valor que será utilizado nas comparações.

4. CONCEITOS DE CONCRETO ARMADO

A seguir são apresentados alguns conceitos de concreto armado. Uma parte desses conceitos será utilizada no dimensionamento das seções submetidas à flexão reta.

4.1. *Propriedades dos materiais*

4.1.1. *Concreto*

a) Resistência característica

Quando são conduzidos ensaios de compressão em corpos cilíndricos de concreto, percebe-se que a resistência do material apresenta uma dispersão. O valor que é tomado como representativo da resistência daquele grupo de corpos de prova é chamado de valor característico. A norma NBR 6118 (2007) define o valor característico da resistência à compressão do concreto como aquele que tem uma probabilidade de 5% de não ser atingido. Considerando uma distribuição normal para a resistência dos corpos de prova, a resistência característica do concreto é dada por

$$f_{ck} = f_{cm} - 1,65 \cdot s_c , \quad (4-1)$$

onde:

- f_{ck} é a resistência característica dos corpos de prova
- f_{cm} é a resistência média dos corpos de prova
- s_c é o desvio padrão da amostra.

O valor 1,65 sai da tabela de distribuição normal, como pode ser verificado no anexo A.

A média da amostra é dada por

$$f_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^n f_{ci}}{n} \quad (4-2)$$

e o desvio padrão é dado por

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (f_i - f_m)^2}{n - 1}} . \quad (4-3)$$

A figura 4-1 ilustra o conceito de valor característico para a resistência do concreto à compressão.

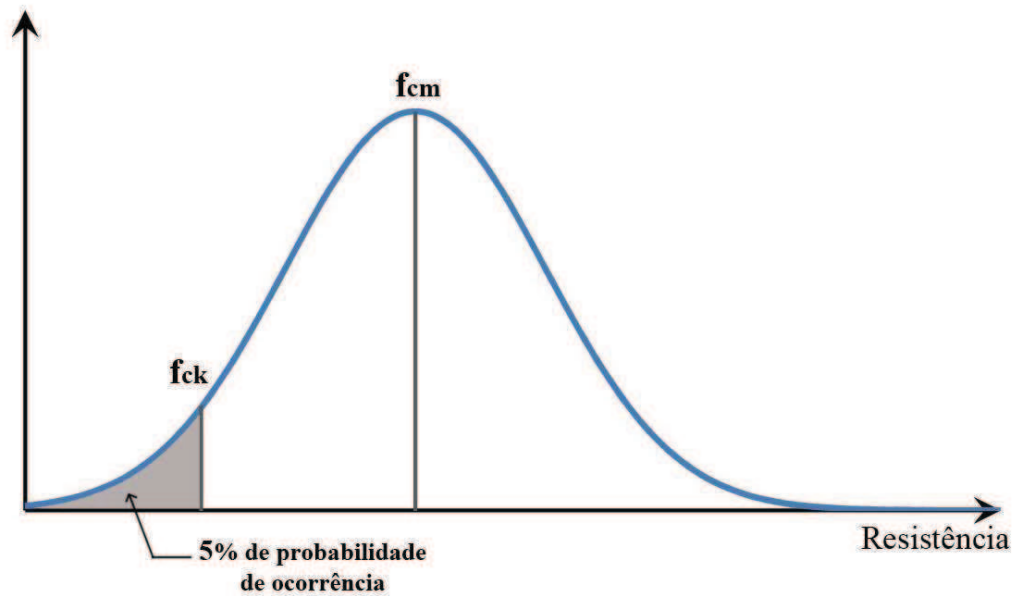


Figura 4-1 - Valor característico da resistência

É importante ressaltar que o valor característico não é um parâmetro estatístico. Isto ocorre porque somente com a informação do valor característico não é possível fazer o caminho contrário, ou seja, determinar a média o desvio padrão da amostra, mesmo que seja considerada alguma distribuição específica. Para que isso seja feito, é necessária mais uma informação, como o desvio padrão ou a média da amostra.

b) Diagramas de tensão-deformação

O diagrama de tensão-deformação adotado para o concreto, no estado limite último, segue as fórmulas abaixo (equações 4-4 a 4-7):

- Se $\epsilon_c \leq -3,5\text{‰}$

$$\sigma_c = 0 \quad (4-4)$$

- Se $-3,5\text{‰} \leq \epsilon_c \leq -2,0\text{‰}$

$$\sigma_c = -0,85 \cdot f_{cd} \quad (4-5)$$

- Se $-2,0\text{‰} \leq \epsilon_c \leq 0\text{‰}$

$$\sigma_c = 0,85 f_{cd} \left[1 - \left(1 - \frac{\epsilon_c}{2\text{‰}} \right)^2 \right] \quad (4-6)$$

- Se $\epsilon_c > 0\text{‰}$

$$\sigma_s = 0 \quad (4-7)$$

O diagrama é ilustrado na figura 4-2:

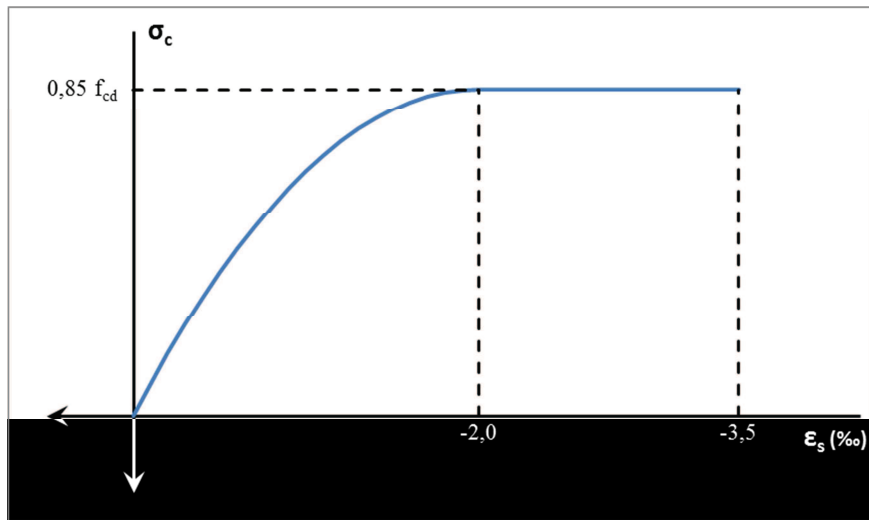


Figura 4-2 – Diagrama de cálculo de tensão-deformação do concreto

A norma permite considerar, simplificada, um diagrama retangular com $0,85 f_{cd}$ (considerando que não há diminuição da largura da seção à medida que se aproxima do bordo comprimido) de altura $0,8 x$, onde x é a profundidade da linha neutra. Este diagrama simplificado foi utilizado no dimensionamento.

c) Módulo de elasticidade

A Norma NBR 6118 (2007) fornece fórmulas para se estimar o módulo de elasticidade do concreto. O módulo de elasticidade inicial (em MPa) é dado por

$$E_{ci} = 5600\sqrt{f_{ck}}, \quad (4-8)$$

com f_{ck} em MPa, e o módulo de elasticidade secante (em MPa) é dado por

$$E_{cs} = 0,85 \cdot E_{ci} = 4760\sqrt{f_{ck}}. \quad (4-9)$$

Considerando um concreto de $f_{ck} = 25\text{MPa}$, pode-se obter

$$E_{ci} = 28000 \text{ MPa} = 28,0 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2 \quad (4-10)$$

e

$$E_{cs} = 23800 \text{ MPa} = 23,8 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2. \quad (4-11)$$

4.1.2. Aço

A seguir, são apresentadas as propriedades do aço CA-50 da armadura passiva que são utilizadas neste trabalho.

a) Resistência característica

A tensão de escoamento característica do aço é definida da mesma forma que a resistência à compressão característica do concreto:

$$f_{yk} = f_{ym} - 1,65 \cdot s_s, \quad (4-12)$$

onde:

- f_{yk} é a tensão de escoamento característica dos corpos de prova;
- f_{ym} é a tensão de escoamento média dos corpos de prova;
- s_s é o desvio padrão da amostra.

O gráfico da figura 4-1 também pode ser utilizado para ilustrar a tensão de escoamento característica do aço.

b) Módulo de elasticidade

A norma NBR-6118 (2007) afirma que o módulo de elasticidade do aço da armadura passiva (CA-50) pode ser utilizado como

$$E_s = 210 \text{ GPa} = 210 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2. \quad (4-13)$$

c) Diagramas de tensão-deformação

A relação de tensão-deformação do aço é dada pelas fórmulas abaixo (4-14 a 4-16):

- Se $-10\text{‰} \leq \epsilon_s \leq -2,07\text{‰}$

$$\sigma_s = -f_{yd} \quad (4-14)$$

- Se $-2,07\text{‰} \leq \epsilon_s \leq 2,07\text{‰}$

$$\sigma_s = E_s \cdot \epsilon_s \quad (4-15)$$

- Se $2,07\text{‰} \leq \epsilon_s \leq 10\text{‰}$

$$\sigma_s = f_{yd} \quad (4-16)$$

onde E_s é o módulo de elasticidade do aço. Este diagrama é ilustrado na figura 4-3:

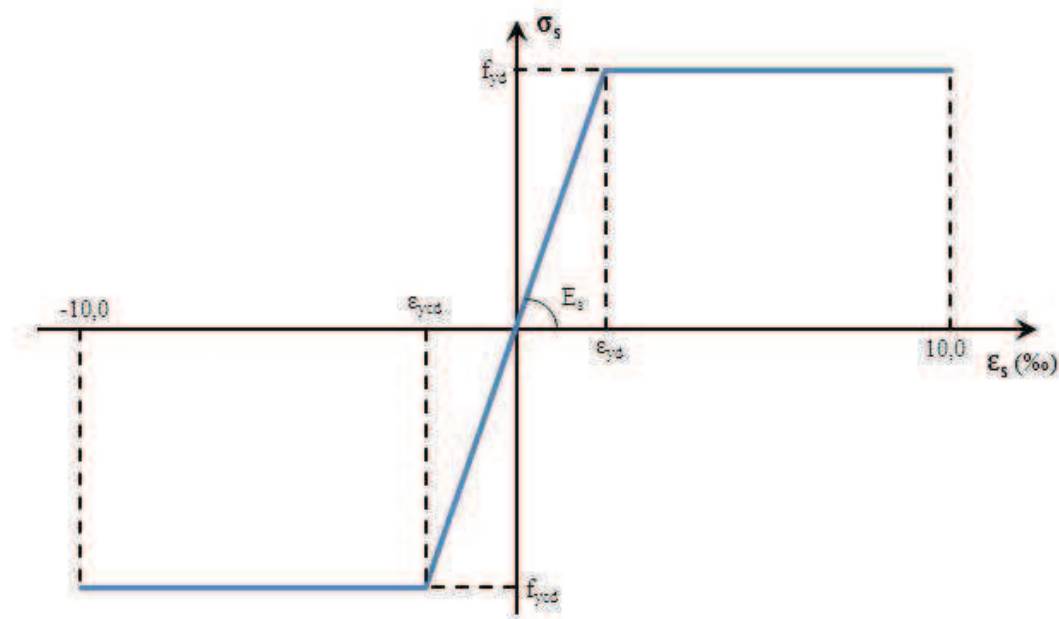


Figura 4-3 - Diagrama de cálculo de tensão-deformação do aço CA-50

4.2. Método dos coeficientes parciais

O método dos coeficientes parciais é o método utilizado atualmente para verificação dos estados limites. Ele representa um avanço em relação ao método utilizado anteriormente (método das tensões admissíveis) por considerar coeficientes de ponderação diferentes em função da natureza das ações e das resistências.

O método do Estado Limite é um método semi-probabilístico, já que ele utiliza valores característicos e coeficientes de ponderação diferenciados para levar em consideração a incerteza nas variáveis do dimensionamento. Ele possui, porém, dois grandes problemas. O primeiro deles é não levar em consideração todas as incertezas que podem influenciar o dimensionamento.

O segundo problema é que o método dos estados limite não é capaz, por si só, de determinar os coeficientes de ponderação com um embasamento probabilístico. Para isso, é necessário recorrer à análise de confiabilidade.

As normas mais modernas, como o Eurocode e o ACI, têm buscado utilizar a análise de confiabilidade na definição desses coeficientes. A definição desses coeficientes é chamada de Calibração de normas de projeto (*Code Calibration*). Mais informação

sobre este assunto pode ser encontrada em LIMA e SAGRILO (2004), MELCHERS (1999) e JCSS (2006).

4.3. Ações

De acordo com a NBR 6118 (2007), deve ser considerada a influência de todas as ações que possam produzir efeitos significativos na estrutura analisada. A NBR 8681 (2003) define três grupos de ações, de acordo com a variabilidade no tempo: ações permanentes, ações variáveis e ações excepcionais.

4.3.1. Ações permanentes

Ações permanentes são as que ocorrem com valores constantes ou com pouca variabilidade durante a vida da construção ou as ações que crescem no tempo, tendendo a um valor limite constante.

4.3.2. Ações variáveis

A NBR 6118 (2007) define as ações variáveis como aquelas decorrentes do uso da construção, dos efeitos devidos às forças de frenagem, forças de impacto, forças centrífugas, efeitos do vento, das variações de temperatura, do atrito nos aparelhos de apoio e das pressões hidrostáticas e hidrodinâmicas.

4.3.3. Ações excepcionais

De acordo com a NBR 8681 (2003), consideram-se como excepcionais as ações decorrentes de causas tais como explosões, choques de veículos, incêndios, enchentes ou sismos excepcionais.

4.4. Combinações de ações no estado limite último

A combinação de ações tem como finalidade transformar esforços característicos de naturezas distintas e, portanto, com variabilidades diferentes, em um valor de cálculo que será utilizado no dimensionamento, chamado de esforço de cálculo (ou de projeto). Desta forma são aplicados coeficientes de majoração das cargas, da seguinte forma

$$F_d = \gamma_g \cdot F_{gk} + \gamma_{\epsilon g} \cdot F_{\epsilon gk} + \gamma_q \cdot \left(F_{q1k} + \sum \psi_{0j} \cdot F_{qjk} \right) + \gamma_{\epsilon q} \cdot \psi_{0\epsilon} \cdot F_{\epsilon qk} \quad (4-17)$$

onde:

- F_d – é o valor de cálculo do esforço solicitante

- $F_{gk}, F_{\varepsilon gk}, F_{q1k}, F_{qjk}, F_{\varepsilon qk}$ – são, respectivamente, os valores característicos devidos às ações permanentes diretas, ações permanentes indiretas, ação variável direta principal, ações variáveis diretas secundárias e ação variável indireta;
- $\gamma_g, \gamma_{\varepsilon g}, \gamma_q, \gamma_{\varepsilon q}$ – são, respectivamente, os coeficientes de majoração das ações permanentes diretas, ações permanentes indiretas, ações variáveis diretas e ações variáveis indiretas;
- ψ_{0j} e $\psi_{0\varepsilon}$ – são coeficientes de redução que levam em consideração a menor probabilidade de todas as cargas variáveis ocorrerem ao mesmo tempo com o seu valor característico;

4.5. Dimensionamento a solicitações normais de acordo com a NBR-6118

Os elementos estruturais que serão analisados neste trabalho serão dimensionados de acordo com a norma brasileira de concreto armado, a NBR-6118 (2007). Somente depois, com as dimensões do elemento estrutural e com as armaduras definidas, será feita a análise de confiabilidade para determinar a probabilidade de falha na seção mais solicitada à flexão.

A seguir, serão explicados alguns conceitos do dimensionamento de peças de concreto armado.

4.5.1. Estados limites

A norma define dois tipos de estado limite:

- Estado limite último: relativo ao colapso ou à ruína de estrutural, implicando na paralisação do uso da estrutura.
- Estado limite de serviço: relativo à durabilidade e aparência das estruturas, conforto dos usuários e à boa utilização das mesmas.

4.5.2. Verificação dos estados limites últimos

De acordo com a NBR6118, a segurança das estruturas de concreto armado deve ser verificada para os seguintes estados limites últimos:

- a) estado limite último da perda do equilíbrio;
- b) estado limite último do esgotamento da capacidade resistente da estrutura, no seu todo ou em parte, devido às solicitações normais e tangenciais;

- c) estado limite último da estrutura, no seu todo ou em parte, considerando os efeitos de segunda ordem;
- d) estado limite último provocado por solicitações dinâmicas;
- e) estado limite último de colapso progressivo;
- f) outros estados limites últimos que eventualmente possam ocorrer em casos especiais.

Neste trabalho serão estudados somente os estados limites de solicitações normais de flexão reta relacionados na letra b.

4.6. Domínios de ruptura para seções sob solicitações normais

A NBR 6118 (2007) estabelece estados limites para o dimensionamento na ruptura das seções transversais dos elementos estruturais. A figura 4-5 apresenta os domínios de ruptura estabelecidos na norma.

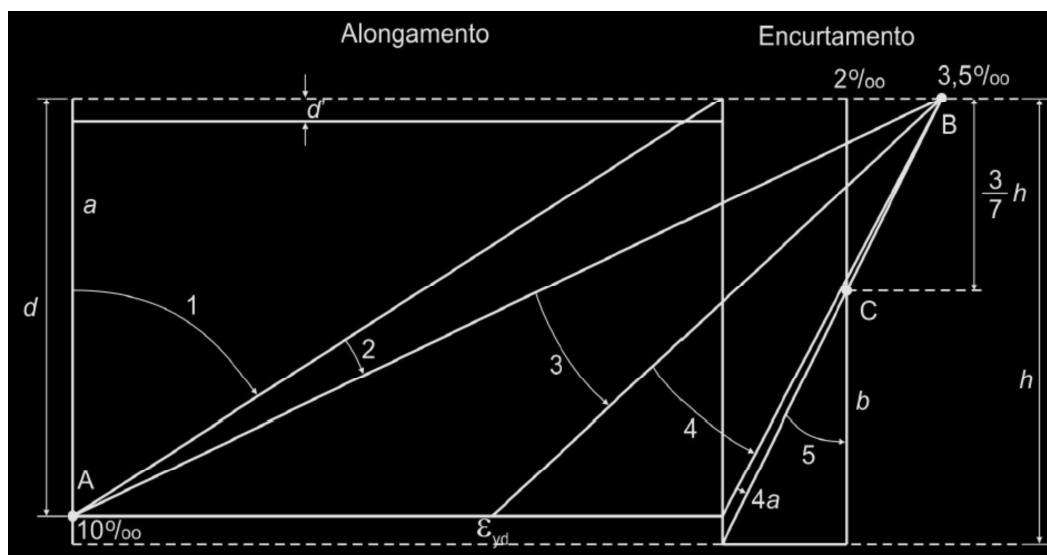


Figura 4-4 - Estados Limites da NBR6118

Qualquer reta que esteja contida dentro de um domínio configura um estado limite último.

4.6.1. Reta a

A reta a representa um estado limite de deformação plástica excessiva, em que o elemento está submetido a alongamento uniforme. Nesta situação, as armaduras inferiores e superiores atingem um alongamento de 10 %.

4.6.2. Domínio 1

O domínio 1 também é um estado limite de deformação plástica excessiva. Ele se configura quando a armadura em um dos bordos atinge o alongamento de 10‰ e a armadura no bordo oposto tem um alongamento menor que 10‰ e maior do que 0. Não há esforço de compressão neste domínio.

4.6.3. Domínio 2

Este domínio também é um estado limite de deformação plástica excessiva. Ele se configura quando a armadura em um dos bordos atinge o alongamento de 10‰ e o concreto no bordo oposto tem um encurtamento entre 0 e 3,5‰. Neste domínio, há um bordo comprimido e outro tracionado.

Este domínio pode ser usado no dimensionamento de lajes ou vigas submetidas à flexão simples ou de elementos estruturais submetidos à flexão composta.

4.6.4. Domínio 3

O Domínio 3 é um estado limite de encurtamento limite do concreto. Este domínio de ruptura se caracteriza quando um dos bordos sofre um encurtamento de 3,5‰ e a armadura disposta próxima ao outro bordo sofre um alongamento entre ϵ_{yd} (deformação de início do escoamento) e 10‰.

Este domínio pode ser utilizado no dimensionamento de seções submetidas à flexão simples (chamadas de seção subarmada) ou à flexão composta.

4.6.5. Domínio 4

Este domínio de ruptura se caracteriza quando um dos bordos sofre um encurtamento de 3,5‰ e a armadura disposta próxima ao outro bordo sofre um alongamento entre 0 e ϵ_{yd} (deformação de início do escoamento). O estado limite se caracteriza pela ruptura do bordo comprimido de concreto, sem o escoamento do aço à tração.

Este domínio pode ser utilizado no dimensionamento de peças submetidas à flexão composta. Deve ser evitado no dimensionamento de peças submetidas à flexão simples (chamadas de seção superarmada), já que a ruptura pode ocorrer de forma brusca.

4.6.6. Domínio 4a

O domínio 4a é um domínio de transição entre os domínios 4 e 5. A partir deste domínio, todas as armaduras estão comprimidas.

4.6.7. Domínio 5

Neste domínio, não há esforços de tração, somente de compressão. Um dos bordos apresenta encurtamento entre 2‰ e 3,5‰, enquanto o outro bordo apresenta encurtamento entre 0 e 2‰. As configurações têm como característica o encurtamento de 2‰ no ponto afastado de 3/7 h do bordo mais encurtado.

Este domínio pode ser utilizado no dimensionamento de peças submetidas à compressão não uniforme, como pilares submetidos a carga excêntrica.

4.6.8. Reta b

A reta b é um estado limite de ruptura com encurtamento uniforme. Esta situação limite é configurada quando os bordos inferior e superior atingem um encurtamento de 2 ‰.

4.7. Critério de ductilidade

Um dos recursos utilizados para evitar uma ruptura frágil é garantir que a seção possa sofrer grandes rotações. A norma NBR 6118 (2007) sugere, então, limites para a posição da linha neutra de vigas e lajes:

- $x/d \leq 0,5$ para concretos com $f_{ck} \leq 35 \text{ MPa}$;
- $x/d \leq 0,4$ para concretos com $f_{ck} > 35 \text{ MPa}$.

No dimensionamento, a razão x/d será chamada de k_x . Considerando concreto com $f_{ck} = 25 \text{ MPa}$, na situação limite

$$k_{x,lim} = 0,5. \quad (4-18)$$

Chamando a razão entre o braço de alavanca (z) e a altura útil da seção de k_z , o valor na situação limite, para o mesmo f_{ck} é

$$k_{z,lim} = 1 - 0,4 \cdot k_{x,lim} = 0,8 \quad (4-19)$$

O parâmetro k_{md} é dado por

$$k_{md} = \frac{M_d}{b \cdot d^2 \cdot f_{cd}} = 0,68 \cdot k_x \cdot k_z. \quad (4-20)$$

e o valor máximo do

$$k_{md,lim} = 0,272. \quad (4-21)$$

5. FLEXÃO SIMPLES

Neste capítulo, será feita a estimativa da probabilidade de falha das seções mais solicitadas à flexão simples de lajes e vigas. Essa estimativa será feita utilizando o método de Monte Carlo, com auxílio do programa VaP. Uma descrição do programa pode ser encontrada no Anexo C. É importante ressaltar que as probabilidades de falha estimadas referem-se somente à seção mais solicitada de cada caso estudado.

A probabilidade de falha do elemento estrutural ao modo de comportamento estudado será sempre maior que a probabilidade de falha da seção mais solicitada. Isto ocorre porque, mesmo que a solicitação seja menor nas outras seções transversais, existe uma probabilidade de que a área de concreto, a resistência do concreto, a área das armaduras e a resistência do aço, para citar algumas das variáveis envolvidas, também possam ser menores.

No próximo item serão explicados de forma detalhada os casos estudados. Em seguida, será deduzida a função de falha para o modo de comportamento estudado e apresentados o tipo de distribuição e os parâmetros de cada variável aleatória envolvida. Por fim, serão apresentados os resultados e serão feitos alguns comentários e conclusões.

5.1. Casos estudados

Neste capítulo, serão estudados casos de flexão simples de lajes e vigas. Será considerado que os elementos estudados não têm capacidade de se adaptar plasticamente. Na primeira parte dos exemplos, será estudada a influência da variação da taxa de armadura no índice de confiabilidade. Nesses exemplos, varia-se a taxa de armadura da seção e os esforços solicitantes variam de acordo com a capacidade resistente da seção; as demais variáveis permanecem constantes.

Na segunda parte da flexão simples, será estudada a influência da variação da altura dos elementos estruturais no índice de confiabilidade. Neste caso, a armadura é mantida constante, os esforços variam de acordo com as dimensões da seção e os demais parâmetros são mantidos constantes. Ainda na segunda parte, para as lajes com altura menor do que 19 cm, será estudada a influência no índice de confiabilidade de se utilizar ou não um coeficiente γ_n , como sugerido por BUENO (2011).

Este coeficiente será utilizado no dimensionamento da mesma forma que o coeficiente γ_n da NBR 6118 (2007) para pilares e pilares-parede que possuem seção com dimensão menor do que 19 cm.

Nos exemplos a seguir, os elementos, submetidos à flexão simples, apresentam solicitações devidas às ações permanentes e a uma ação variável (acidental). Para estudar a influência do tipo de carregamento, será utilizada uma variável auxiliar χ , definida como a razão entre a solicitação variável característica e a solicitação característica total:

$$\chi = \frac{M_{qk}}{M_{gk} + M_{qk}} \quad (5-1)$$

O valor de χ nos exemplos varia de 0 a 1, porém os valores de χ próximos a 0 e a 1 apresentam baixa probabilidade de ocorrência nas estruturas reais.

5.2. Dados gerais

5.2.1. Função de falha

Nos problemas de flexão simples de lajes e de vigas, será considerado que há somente armadura no lado tracionado da peça. A função de falha pode ser escrita como

$$Z = \theta_m [R - S], \quad (5-2)$$

onde R representa a resistência, S representa a solicitação e θ_m é a variável que descreve as incertezas do modelo. Se a função de falha for escrita em termos de momentos fletores, tem-se que a resistência é dada pela expressão

$$R = A_s \cdot f_y \cdot z, \quad (5-3)$$

onde A_s é área de armadura, f_y é a tensão de escoamento do aço e z é o braço de alavanca. Já a solicitação pode ser dada pela expressão

$$S = M_g + M_q, \quad (5-4)$$

Onde M_g é o momento devido às cargas permanentes e M_q é o momento devido à carga accidental. Para chegar à função de falha que realmente será utilizada no problema, é necessário escrever z em função das variáveis básicas. Sabe-se que

$$z = d - 0,4 \cdot x, \quad (5-5)$$

onde d é a altura útil da seção e x é a altura da zona comprimida da seção, considerando o diagrama retangular simplificado da NBR 6118 (2007). O valor de x pode ser encontrado igualando-se as forças de tração (na armadura) com as forças de compressão (no concreto):

$$A_s \cdot f_y = 0,85 \cdot b \cdot 0,8 \cdot x \cdot f_c, \quad (5-6)$$

onde b é a largura da seção em estudo e f_c é a tensão resistente do concreto. O valor de 0,85 é utilizado devido ao efeito Rusch e o valor de 0,8 foi utilizado para se considerar o diagrama retangular equivalente da norma NBR 6118 (2007). Resolvendo para x a equação (5-6), tem-se

$$x = \frac{A_s \cdot f_y}{0,85 \cdot b \cdot 0,8 \cdot f_c}. \quad (5-7)$$

Agora, z pode ser escrito como

$$z = d - 0,4 \cdot \frac{A_s \cdot f_y}{0,85 \cdot b \cdot 0,8 \cdot f_c}. \quad (5-8)$$

Assim, a função de falha na forma final fica

$$Z = \theta_m \left[A_s \cdot f_y \cdot \left(d - \frac{0,5 \cdot A_s \cdot f_y}{0,85 \cdot b \cdot f_c} \right) - (M_g + M_q) \right]. \quad (5-9)$$

A função de falha da equação (5-9) é a mesma utilizada por STUCCHI e SANTOS (2011). Para facilitar a compreensão, a tabela 5-1 apresenta a descrição de todas as variáveis básicas envolvidas no problema.

Tabela 5-1 - Descrição das variáveis aleatórias

Variável	Descrição
θ_m	Incerteza do modelo
A_s	Área de armadura de tração
f_y	Tensão de escoamento da armadura
d	Altura útil da seção
b	Largura da viga ou da laje
f_c	Resistência do concreto à compressão
M_g	Momento fletor solicitante devido às cargas permanentes
M_q	Momento fletor solicitante devido às cargas acidentais

5.2.2. Variáveis aleatórias

Na tabela (5-2) são apresentados alguns dados das variáveis aleatórias, como a distribuição e os parâmetros adotados, juntamente com as fontes dos valores. O termo δ representa o coeficiente de variação. Foi indicado ou o coeficiente de variação ou o desvio padrão da variável, em função do dado disponível nas fontes consultadas. A carga accidental considerada é referente a uma edificação residencial.

Tabela 5-2 – Distribuições e parâmetros adotados

VA	Distribuição	Unidade	Valor característico	Média	δ	Desvio padrão	Fonte
θ_m	Normal	-	1,00	1,02	0,06	-	(1)
A_s	Normal	m ²	As	As	0,015	-	(1)
f_y	Normal	kN/m ²	$f_{yk} = 500.000$	$1,089 f_{yk}$	0,05	-	(1) e (3)
d (laje)	Normal	m	d	d	-	0,015	(1)
d (viga)	Normal	m	d	d	-	0,03	(1)
b (laje)	Determinístico	m	l	-	-	-	-
b (viga)	Normal	m	b	b	-	0,01	(1)
f_c	Normal	kN/m ²	$f_{ck} = 25.000$	$1,196 f_{ck}$	0,15	-	(1) e (3)
M_g	Normal	kN·m	M_g	$1,05 M_g$	0,1	-	(1) e (2)
M_q	Gumbel	kN·m	M_q	$0,934 M_q$	0,2	-	(1)

(1) STUCCHI e SANTOS (2011)

(2) HOLYCKÝ e SYKORA (2011)

(3) *Probabilistic Model Code* (JCSS, 2006)

Os valores específicos serão apresentados em cada caso estudado.

5.2.3. Número de amostras

O número de amostras foi estimado no item 3.7.4. Considerando que a função de falha tem 8 variáveis aleatórias, o número mínimo de simulações a ser utilizado deve ser

$$N_{Total} = 8 \cdot 43000 = 344.000 . \quad (5-10)$$

Nos problemas estudados foram feitas 2.000.000 repetições, um número bem maior do que o número de tentativas iniciais sugeridas.

5.2.4. Determinação dos esforços solicitantes

Nos casos estudados, serão fixadas primeiramente as dimensões e a armadura do elemento estudado. Com esses valores definidos, serão calculados os esforços

resistentes de cálculo. Os esforços solicitantes de cálculo serão considerados iguais aos esforços resistentes de cálculo. Portanto, $M_d = M_{Rd} = M_{Sd}$.

A seguir, é explicado como os esforços solicitantes podem ser encontrados a partir da configuração da seção. Sabe-se que

$$A_s = \frac{M_d}{z \cdot f_{yd}} \quad (5-11)$$

$$M_d = A_s \cdot f_{yd} \cdot z \quad (5-12)$$

e sabe-se que

$$k_{md} = \frac{M_d}{b \cdot d^2 \cdot f_{cd}} \quad (5-13)$$

Substituindo a equação (5-12) em (5-13), tem-se

$$k_{md} = \frac{A_s \cdot f_{yd} \cdot z}{b \cdot d^2 \cdot f_{cd}} = \frac{A_s \cdot f_{yd} \cdot k_z}{b \cdot d \cdot f_{cd}} \quad (5-14)$$

A expressão de k_{md} também pode ser dada pela fórmula

$$k_{md} = 0,68 \cdot k_x \cdot k_z \quad (5-15)$$

Igualando (5-15) e (5-14), chega-se à

$$0,68 \cdot k_x \cdot k_z = \frac{A_s \cdot f_{yd} \cdot k_z}{b \cdot d \cdot f_{cd}} \quad (5-16)$$

Da fórmula (5-16), pode-se tirar o valor de k_x .

$$k_x = \frac{A_s \cdot f_{yd}}{0,68 \cdot b \cdot d \cdot f_{cd}} \quad (5-17)$$

A expressão do braço de alavanca z é:

$$z = k_z \cdot d = (1 - 0,4 \cdot k_x) \cdot d \quad (5-18)$$

$$z = \left(d - 0,4 \cdot \frac{A_s \cdot f_{yd}}{0,68 \cdot b \cdot f_{cd}} \right) \quad (5-19)$$

Substituindo (5-19) em (5-12):

$$M_d = A_s \cdot f_{yd} \cdot \left(d - 0,4 \cdot \frac{A_s \cdot f_{yd}}{0,68 \cdot b \cdot f_{cd}} \right) \quad (5-20)$$

Este é o valor do momento de cálculo. Como os coeficientes de majoração das cargas permanentes e das cargas acidentais tem o mesmo valor ($\gamma = 1,4$) para as combinações normais com apenas uma ação acidental, pode-se escrever

$$M_k = \frac{M_d}{1,4} . \quad (5-21)$$

Utilizando o parâmetro χ

$$\chi = \frac{M_q}{M_g + M_q} , \quad (5-22)$$

chega-se ao valor característico do momento devido à carga acidental

$$M_q = \chi \cdot (M_k) \quad (5-23)$$

e ao valor do momento devido à carga permanente

$$M_g = M_k - M_q = (1 - \chi) \cdot M_k . \quad (5-24)$$

Em todos os casos estudados, são utilizados momentos menores que o momento máximo para seção sem armadura dupla. Este momento é dado por

$$M_{d,máx} = k_{md,máx} \cdot b \cdot d^2 \cdot f_{cd} . \quad (5-25)$$

Além disso, a armadura utilizada é sempre maior do que a armadura mínima exigida pela norma NBR 6118 (2007):

$$A_s > A_{s,mín} = \rho_{mín} \cdot b \cdot h . \quad (5-26)$$

5.3. Descrição do programa utilizado

O programa utilizado nas análises é o VaP 1.6 e sua descrição pode ser encontrada no Anexo C.

5.4. Exemplos numéricos variando a taxa de armadura

5.4.1. Descrição

Neste item é estudada a influência da taxa de armadura no índice de confiabilidade de seções de lajes e vigas submetidas à flexão simples. Tanto para as lajes quanto para as vigas, serão estudadas a situação da seção com taxa de armadura de 0,40% e de 0,80%.

$$\rho_1 = 0,40\% \quad (5-27)$$

$$\rho_2 = 0,80\% \quad (5-28)$$

Além dessas taxas, para a laje de 20 cm e para a viga de 20 cm x 50 cm será considerada a taxa de armadura correspondente ao valor de k_{md} máximo, o que corresponde a uma taxa em torno de 1,20% para essas seções.

A taxa de armadura pode ser definida como a razão entre a área das armaduras e a área bruta da seção de concreto.

$$\rho = \frac{A_s}{b \cdot h} \quad (5-29)$$

Neste problema foram consideradas lajes e vigas com seções retangulares, submetidas somente a momentos fletores. Foram estudadas lajes com altura de 10 cm e 20 cm e vigas com 20 cm x 50 cm, para diferentes valores do parâmetro χ .

A seguir, serão apresentados os parâmetros das variáveis aleatórias envolvidas no problema. Depois, serão apresentados os resultados na forma de tabelas e gráfico. Os valores obtidos para β serão comparados com o valor alvo ($\beta_a = 3,8$) estabelecido no Eurocode, para elementos estruturais de edificações residenciais ou comerciais.

5.4.2. Valores das variáveis aleatórias

Na tabela 5-3 são apresentados os valores dos parâmetros das variáveis aleatórias comuns a todos os casos analisados neste problema.

Tabela 5-3 – Parâmetros das variáveis aleatórias

Variável	Distribuição	Unidade	Média	Desvio Padrão
θ_m	Normal	-	1,02	0,0612
f_y	Normal	kN/m ²	544.500	27.225
b (laje)	Determinístico	m	1	-
b (viga)	Normal	m	0,2	0,01
f_c	Normal	kN/m ²	29.900	4.485

A altura útil varia em função das dimensões do elemento estudado e os momentos solicitantes variam em função das dimensões do elemento, da taxa de armadura e do parâmetro χ . Estes valores são apresentados a seguir para cada caso.

a) Laje com $h = 10 \text{ cm}$ e $\rho = 0,4\%$

A armadura adotada é

$$A_s = \frac{0,4}{100} \cdot 100 \cdot 10 = 4 \text{ cm}^2/\text{m} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{m}. \quad (5-30)$$

Foi adotado cobrimento de 2,0 cm e bitola de 10 mm.

$$d = 10 - 2,0 - \frac{1,0}{2} = 7,5 \text{ cm} = 0,075 \text{ m} \quad (5-31)$$

A tabela 5-4 resume os parâmetros das variáveis aleatórias A_s e d .

Tabela 5-4 - Parâmetros de A_s e d

VA	Distribuição	Unidade	Média	Desvio Padrão
A_s	Normal	$10^{-4} \text{ m}^2/\text{m}$	4,00	0,06
d	Normal	m	0,075	0,015

Os esforços são apresentados na tabela 5-5, em função de χ .

Tabela 5-5 - Esforços em função de χ

χ	VA (Valores em $\text{kN}\cdot\text{m}/\text{m}$)			
	M_g (Normal)		M_q (Gumbel)	
	Média	Desvio Padrão	Média	Desvio Padrão
0,0	9,04	0,904	0,00	0,000
0,1	8,13	0,813	0,80	0,161
0,2	7,23	0,723	1,61	0,321
0,3	6,32	0,632	2,41	0,482
0,4	5,42	0,542	3,21	0,643
0,5	4,52	0,452	4,02	0,804
0,6	3,61	0,361	4,82	0,964
0,7	2,71	0,271	5,63	1,125
0,8	1,81	0,181	6,43	1,286
0,9	0,90	0,090	7,23	1,447
1,0	0,00	0,000	8,04	1,607

b) Laje com $h = 10 \text{ cm}$ e $\rho = 0,8\%$

A armadura adotada é

$$A_s = \frac{0,8}{100} \cdot 100 \cdot 10 = 8 \text{ cm}^2/\text{m} = 8 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{m} . \quad (5-32)$$

Foi adotado cobrimento de 2,0 cm e bitola de 10 mm.

$$d = 10 - 2,0 - \frac{1,0}{2} = 7,5 \text{ cm} = 0,075 \text{ m} \quad (5-33)$$

A tabela 5-6 resume os parâmetros das variáveis aleatórias A_s e d .

Tabela 5-6 - Parâmetros de A_s e d

VA	Distribuição	Unidade	Média	Desvio Padrão
A_s	Normal	$10^{-4} \text{ m}^2/\text{m}$	8,00	0,12
d	Normal	m	0,075	0,015

Os esforços são apresentados na tabela 5-7, em função de χ .

Tabela 5-7 - Esforços em função de χ

χ	VA (Valores em $\text{kN}\cdot\text{m}/\text{m}$)			
	M_g (Normal)		M_q (Gumbel)	
	Média	Desvio Padrão	Média	Desvio Padrão
0,0	16,58	1,658	0,00	0,000
0,1	14,92	1,492	1,47	0,295
0,2	13,26	1,326	2,95	0,590
0,3	11,60	1,160	4,42	0,885
0,4	9,95	0,995	5,90	1,180
0,5	8,29	0,829	7,37	1,474
0,6	6,63	0,663	8,85	1,770
0,7	4,97	0,497	10,32	2,064
0,8	3,32	0,332	11,80	2,359
0,9	1,66	0,166	13,27	2,654
1,0	0,00	0,000	14,75	2,949

c) Laje com $h = 20 \text{ cm}$ e $\rho = 0,4\%$

A armadura adotada é

$$A_s = \frac{0,4}{100} \cdot 100 \cdot 20 = 8 \text{ cm}^2/\text{m} = 8 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{m}. \quad (5-34)$$

Foi adotado cobrimento de 2,0 cm e bitola de 12,5 mm.

$$d = 20 - 2,0 - \frac{1,25}{2} = 17,375 \text{ cm} \approx 0,174 \text{ m} \quad (5-35)$$

A tabela 5-8 resume os parâmetros das variáveis aleatórias A_s e d .

Tabela 5-8 - Parâmetros de A_s e d

VA	Distribuição	Unidade	Média	Desvio Padrão
A_s	Normal	$10^{-4} \text{ m}^2/\text{m}$	8,00	0,12
d	Normal	m	0,174	0,015

Os esforços são apresentados na tabela 5-9, em função de χ .

Tabela 5-9 - Esforços em função de χ

χ	VA (Valores em $\text{kN}\cdot\text{m}/\text{m}$)			
	M_g (Normal)		M_q (Gumbel)	
	Média	Desvio Padrão	Média	Desvio Padrão
0,0	42,34	4,234	0,00	0,000
0,1	38,10	3,810	3,77	0,753
0,2	33,87	3,387	7,53	1,506
0,3	29,64	2,964	11,30	2,260
0,4	25,40	2,540	15,06	3,013
0,5	21,17	2,117	18,83	3,766
0,6	16,94	1,694	22,60	4,519
0,7	12,70	1,270	26,36	5,273
0,8	8,47	0,847	30,13	6,026
0,9	4,23	0,423	33,89	6,779
1,0	0,00	0,000	37,66	7,532

d) Laje com $h = 20 \text{ cm}$ e $\rho = 0,8\%$

A armadura adotada é

$$A_s = \frac{0,8}{100} \cdot 100 \cdot 20 = 16 \text{ cm}^2/\text{m} = 16 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{m}. \quad (5-36)$$

Foi adotado cobrimento de 2,0 cm e bitola de 12,5 mm.

$$d = 20 - 2,0 - \frac{1,25}{2} = 17,375 \text{ cm} \approx 0,174 \text{ m} \quad (5-37)$$

A tabela 5-10 resume os parâmetros das variáveis aleatórias A_s e d .

Tabela 5-10 - Parâmetros de A_s e d

VA	Distribuição	Unidade	Média	Desvio Padrão
A_s	Normal	$10^{-4} \text{ m}^2/\text{m}$	16,00	0,24
d	Normal	m	0,174	0,015

Os esforços são apresentados na tabela 5-11, em função de χ .

Tabela 5-11 - Esforços em função de χ

χ	VA (Valores em $\text{kN}\cdot\text{m}/\text{m}$)			
	M_g (Normal)		M_q (Gumbel)	
	Média	Desvio Padrão	Média	Desvio Padrão
0,0	78,70	7,870	0,00	0,000
0,1	38,10	3,810	3,77	0,753
0,2	33,87	3,387	7,53	1,506
0,3	29,64	2,964	11,30	2,260
0,4	25,40	2,540	15,06	3,013
0,5	21,17	2,117	18,83	3,766
0,6	16,94	1,694	22,60	4,519
0,7	12,70	1,270	26,36	5,273
0,8	8,47	0,847	30,13	6,026
0,9	4,23	0,423	33,89	6,779
1,0	0,00	0,000	37,66	7,532

e) Laje com $h = 20 \text{ cm}$ e $k_{md,lim}$

Foi adotado cobrimento de $2,0 \text{ cm}$ e bitola de $12,5 \text{ mm}$.

$$d = 20 - 2,0 - \frac{1,25}{2} = 17,375 \text{ cm} \approx 0,174 \text{ m}. \quad (5-38)$$

O momento de cálculo para $k_{md,lim}$ é

$$M_d = 146,6 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad (5-39)$$

e a armadura é

$$A_s = 24,25 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{m}, \quad (5-40)$$

que corresponde a uma taxa de armadura $\rho = 1,21\%$. A tabela 5-12 resume os parâmetros das variáveis aleatórias A_s e d .

Tabela 5-12 - Parâmetros de A_s e d

VA	Distribuição	Unidade	Média	Desvio Padrão
A_s	Normal	$10^{-4} \text{ m}^2/\text{m}$	24,25	0,364
d	Normal	m	0,174	0,015

Os esforços são apresentados na tabela 5-13, em função de χ .

Tabela 5-13 - Esforços em função de χ

χ	VA (Valores em $\text{kN}\cdot\text{m}/\text{m}$)			
	M_g (Normal)		M_q (Gumbel)	
	Média	Desvio Padrão	Média	Desvio Padrão
0,0	109,95	11,00	0,00	0,00
0,1	98,96	9,90	9,78	1,96
0,2	87,96	8,80	19,56	3,91
0,3	76,97	7,70	29,34	5,87
0,4	65,97	6,60	39,12	7,82
0,5	54,97	5,50	48,90	9,78
0,6	43,98	4,40	58,68	11,74
0,7	32,99	3,30	68,46	13,69
0,8	21,99	2,20	78,24	15,65
0,9	11,00	1,10	88,02	17,60
1,0	0,00	0,00	97,80	19,56

f) Viga com 20cm x 50cm e $\rho = 0,4\%$

A armadura adotada é

$$A_s = 2\phi 16 = 4,02 \text{ cm}^2 = 4,02 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2, \quad (5-41)$$

o que dá uma taxa de armadura

$$\rho = \frac{4,02}{20 \cdot 50} \approx 0,4\%. \quad (5-42)$$

Foi adotado cobrimento de 2,0 cm e estribo de 10 mm.

$$d = 50 - 2,0 - 0,5 - \frac{1,6}{2} = 46,7 \text{ cm} = 0,467 \text{ m} \quad (5-43)$$

A tabela 5-14 resume os parâmetros das variáveis aleatórias A_s e d .

Tabela 5-14 - Parâmetros de A_s e d

VA	Distribuição	Unidade	Média	Desvio Padrão
A_s	Normal	10^{-4} m^2	4,02	0,0603
d	Normal	m	0,467	0,03

Os esforços são apresentados na tabela 5-15, em função de χ .

Tabela 5-15 - Esforços em função de χ

χ	VA (Valores em $\text{kN}\cdot\text{m}$)			
	M_g (Normal)		M_q (Gumbel)	
	Média	Desvio Padrão	Média	Desvio Padrão
0,0	57,46	5,746	0,00	0,000
0,1	51,72	5,172	5,11	1,022
0,2	45,97	4,597	10,22	2,045
0,3	40,22	4,022	15,33	3,067
0,4	34,48	3,448	20,45	4,089
0,5	28,73	2,873	25,56	5,111
0,6	22,98	2,298	30,67	6,134
0,7	17,24	1,724	30,67	6,134
0,8	11,49	1,149	35,78	7,156
0,9	5,75	0,575	40,89	8,178
1,0	0,00	0,000	46,00	9,200

g) Viga com 20cm x 50cm e $\rho = 0,8\%$

A armadura adotada é

$$A_s = 4\phi 16 = 8,04 \text{ cm}^2 = 8,04 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2, \quad (5-44)$$

o que dá uma taxa de armadura

$$\rho = \frac{8,04}{20 \cdot 50} \approx 0,8\% . \quad (5-45)$$

Foi adotado cobrimento de 2,0 cm e estribo de 5 mm.

$$d = 50 - 2,0 - 0,5 - \frac{1,6}{2} = 46,7 \text{ cm} = 0,467 \text{ m}. \quad (5-46)$$

A tabela 5-16 resume os parâmetros das variáveis aleatórias A_s e d .

Tabela 5-16 - Parâmetros de A_s e d

VA	Distribuição	Unidade	Média	Desvio Padrão
A_s	Normal	10^{-4} m^2	8,04	0,1206
d	Normal	m	0,467	0,03

Os esforços são apresentados na tabela 5-17:

Tabela 5-17 - Esforços em função de χ

χ	VA (Valores em $\text{kN}\cdot\text{m}$)			
	M_g (Normal)		M_q (Gumbel)	
	Média	Desvio Padrão	Média	Desvio Padrão
0,0	107,37	10,737	0,00	0,000
0,1	96,64	9,664	9,55	1,910
0,2	85,90	8,590	19,10	3,821
0,3	75,16	7,516	28,65	5,731
0,4	64,42	6,442	38,21	7,641
0,5	53,69	5,369	47,76	9,551
0,6	42,95	4,295	57,31	11,462
0,7	32,21	3,221	57,31	11,462
0,8	21,47	2,147	66,86	13,372
0,9	10,74	1,074	76,41	15,282
1,0	0,00	0,000	85,96	17,192

h) Viga com 20cm x 50cm e $k_{md,lim}$

A armadura adotada é

$$A_s = 4\phi 20 = 12,57 \text{ cm}^2 = 12,57 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2, \quad (5-47)$$

o que dá uma taxa de armadura

$$\rho = \frac{12,57}{20 \cdot 50} \approx 1,257\%. \quad (5-48)$$

Foi adotado cobrimento de 2,0 cm e estribo de 5 mm.

$$d = 50 - 2,0 - 0,5 - \frac{2,0}{2} = 46,5 \text{ cm} = 0,465 \text{ m} \quad (5-49)$$

O momento de cálculo para essa armadura é

$$M_d = 199,45 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad (5-50)$$

e o k_{md} vale

$$k_{md} = \frac{199,45}{0,20 \cdot 0,465^2 \cdot \frac{25000}{1,4}} = 0,265, \quad (5-51)$$

valor próximo ao $k_{md,lim}$ (0,272).

A tabela 5-18 resume os parâmetros das variáveis aleatórias A_s e d .

Tabela 5-18 - Parâmetros de A_s e d

VA	Distribuição	Unidade	Média	Desvio Padrão
A_s	Normal	10^{-4} m^2	12,57	0,1885
d	Normal	m	0,465	0,03

Os esforços são apresentados na tabela 5-19:

Tabela 5-19 - Esforços em função de χ

χ	VA (Valores em $\text{kN}\cdot\text{m}$)			
	M_g (Normal)		M_q (Gumbel)	
	Média	Desvio Padrão	Média	Desvio Padrão
0,0	153,68	15,37	0,00	0,00
0,1	134,63	13,46	13,31	2,66
0,2	119,67	11,97	26,61	5,32
0,3	104,71	10,47	39,92	7,98
0,4	89,75	8,98	53,22	10,64
0,5	74,79	7,48	66,53	13,31
0,6	59,83	5,98	79,84	15,97
0,7	44,88	4,49	79,84	15,97
0,8	29,92	2,99	93,14	18,63
0,9	14,96	1,50	106,45	21,29
1,0	0,00	0,00	119,75	23,95

5.4.3. Resultados

As tabelas a seguir (5-20 a 5-27) apresentam os resultados obtidos nas análises, em função do parâmetro χ . Nas tabelas:

- $p (G < 0)$ é a probabilidade de falha encontrada na análise
- β é o índice de confiabilidade, calculado de acordo com a equação (3-3)

Os resultados são apresentados para cada caso estudado.

a) Laje com $h = 10 \text{ cm}$ e $\rho = 0,4\%$

Tabela 5-20 - Resultados da laje com $h=10 \text{ cm}$ e $\rho=0,4\%$

χ	Média ($\text{kN}\cdot\text{m/m}$)	Desvio Padrão ($\text{kN}\cdot\text{m/m}$)	$p (G < 0)$	β
0,0	6,47	3,58	0,03240	1,81
0,1	6,57	3,56	0,02954	1,85
0,2	6,67	3,55	0,02744	1,88
0,3	6,77	3,55	0,02570	1,91
0,4	6,87	3,56	0,02436	1,93
0,5	6,98	3,58	0,02341	1,95
0,6	7,07	3,61	0,02335	1,96
0,7	7,18	3,66	0,02348	1,96
0,8	7,28	3,71	0,02386	1,96
0,9	7,39	3,77	0,02457	1,96
1,0	7,48	3,83	0,02571	1,95

b) Laje com $h = 10 \text{ cm}$ e $\rho = 0,8\%$

Tabela 5-21 - Resultados da laje com $h=10\text{cm}$ e $\rho=0,8\%$

χ	Média ($\text{kN}\cdot\text{m/m}$)	Desvio Padrão ($\text{kN}\cdot\text{m/m}$)	$p (G < 0)$	β
0,0	12,51	7,09	0,03619	1,76
0,1	12,70	7,07	0,03362	1,80
0,2	12,88	7,05	0,03131	1,83
0,3	13,06	7,05	0,02937	1,85
0,4	13,26	7,07	0,02797	1,88
0,5	13,44	7,11	0,02725	1,89
0,6	13,63	7,16	0,02657	1,90
0,7	13,81	7,23	0,02645	1,91
0,8	14,00	7,32	0,02671	1,91
0,9	14,18	7,42	0,02726	1,91
1,0	14,37	7,53	0,02809	1,91

c) Laje com $h = 20 \text{ cm}$ e $\rho = 0,4\%$

Tabela 5-22 - Resultados da laje com $h=20\text{cm}$ e $\rho=0,4\%$

χ	Média ($\text{kN}\cdot\text{m/m}$)	Desvio Padrão ($\text{kN}\cdot\text{m/m}$)	p (G < 0)	β
0,0	30,10	8,96	0,00016	3,36
0,1	30,58	8,80	0,00010	3,48
0,2	31,06	8,73	0,00007	3,56
0,3	31,54	8,73	0,00008	3,61
0,4	32,01	8,84	0,00014	3,62
0,5	32,50	9,04	0,00027	3,60
0,6	32,98	9,30	0,00052	3,55
0,7	33,45	9,64	0,00095	3,47
0,8	33,92	10,06	0,00157	3,37
0,9	34,40	10,52	0,00243	3,27
1,0	34,88	11,05	0,00363	3,16

d) Laje com $h = 20 \text{ cm}$ e $\rho = 0,8\%$

Tabela 5-23 - Resultados da laje com $h=20\text{cm}$ e $\rho=0,8\%$

χ	Média ($\text{kN}\cdot\text{m/m}$)	Desvio Padrão ($\text{kN}\cdot\text{m/m}$)	p (G < 0)	β
0,0	58,47	17,43	0,00019	3,35
0,1	59,37	17,14	0,00012	3,46
0,2	60,26	17,01	0,00008	3,54
0,3	61,14	17,04	0,00009	3,59
0,4	62,03	17,23	0,00013	3,60
0,5	62,95	17,56	0,00026	3,58
0,6	63,81	18,03	0,00046	3,54
0,7	64,69	18,67	0,00083	3,47
0,8	65,58	19,38	0,00141	3,38
0,9	66,46	20,22	0,00217	3,29
1,0	67,35	21,18	0,00317	3,18

e) Laje com $h = 20 \text{ cm}$ e $k_{md} \approx 0,272$

Tabela 5-24 - Resultados da laje com $h=20\text{cm}$ e k_{md} limite

χ	Média ($\text{kN}\cdot\text{m/m}$)	Desvio Padrão ($\text{kN}\cdot\text{m/m}$)	p (G < 0)	β
0,0	85,94	25,89	0,00025	3,32
0,1	87,19	25,52	0,00017	3,42
0,2	88,42	25,34	0,00012	3,49
0,3	89,66	25,37	0,00012	3,53
0,4	90,89	25,62	0,00017	3,55
0,5	92,17	26,06	0,00025	3,54
0,6	93,46	26,69	0,00047	3,50
0,7	94,59	27,50	0,00074	3,44
0,8	95,84	28,47	0,00124	3,37
0,9	97,09	29,59	0,00190	3,28
1,0	98,34	30,86	0,00279	3,19

f) Viga com 20 cm x 50 cm e $\rho = 0,4\%$

Tabela 5-25 - Resultados da viga 20x50 e $\rho=0,4\%$

χ	Média (kN·m)	Desvio Padrão (kN·m)	p (G < 0)	β
0,0	39,84	10,39	0,000018	3,84
0,1	40,48	10,13	0,000007	4,00
0,2	41,11	10,02	0,000006	4,10
0,3	41,74	10,05	0,000010	4,15
0,4	42,37	10,21	0,000034	4,15
0,5	43,00	10,50	0,000109	4,10
0,6	43,64	10,89	0,000270	4,01
0,7	44,27	11,41	0,000590	3,88
0,8	44,90	12,02	0,001093	3,74
0,9	45,54	12,70	0,001810	3,59
1,0	46,17	13,46	0,002823	3,43

g) Viga com 20 cm x 50 cm e $\rho = 0,8\%$

Tabela 5-26 - Resultados da viga 20x50 e $\rho=0,8\%$

χ	Média (kN·m)	Desvio Padrão (kN·m)	p (G < 0)	β
0,0	77,49	20,07	0,000017	3,86
0,1	78,64	19,62	0,000008	4,01
0,2	79,84	19,42	0,000006	4,11
0,3	81,02	19,48	0,000010	4,16
0,4	82,19	19,75	0,000028	4,16
0,5	83,38	20,27	0,000095	4,11
0,6	84,55	20,99	0,000232	4,03
0,7	85,75	21,93	0,000480	3,91
0,8	86,93	23,03	0,000925	3,78
0,9	88,09	24,27	0,001535	3,63
1,0	89,27	25,64	0,002389	3,48

h) Viga com 20 cm x 50 cm e $k_{md} \approx 0,272$

Tabela 5-27 - Resultados da viga 20x50 e k_{md} limite

χ	Média (kN·m)	Desvio Padrão (kN·m)	p (G < 0)	β
0,0	116,60	30,41	0,000027	3,83
0,1	118,30	29,84	0,000019	3,96
0,2	120,00	29,57	0,000015	4,06
0,3	121,70	29,62	0,000016	4,11
0,4	123,40	30,01	0,000033	4,11
0,5	125,00	30,71	0,000082	4,07
0,6	126,70	31,69	0,000185	4,00
0,7	128,50	32,96	0,000390	3,90
0,8	130,10	34,45	0,000766	3,78
0,9	131,80	36,18	0,001329	3,64
1,0	133,50	38,03	0,002045	3,51

Para melhor visualização, os índices de confiabilidades dos casos analisados são apresentados na forma de gráfico (Figura 5-1).

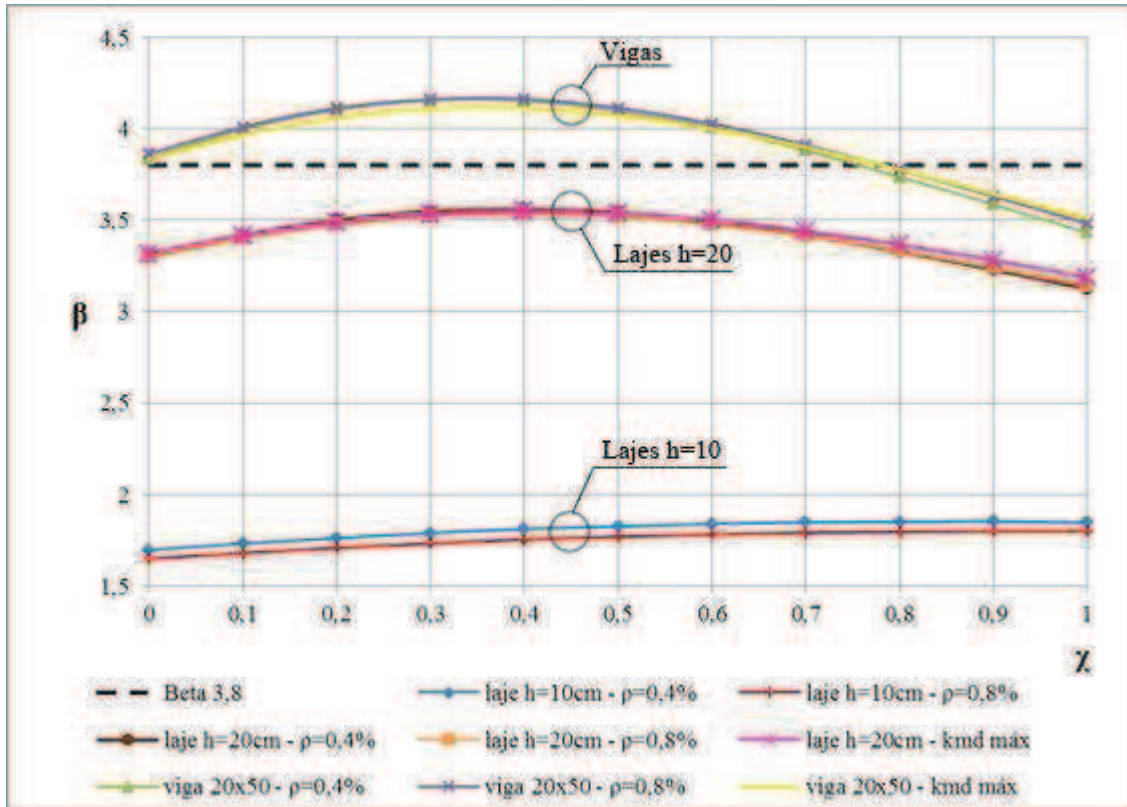


Figura 5-1 - Índice de confiabilidade para os casos analisados

Do gráfico apresentado, podem-se tirar algumas conclusões. A primeira delas é que a mudança na taxa de armadura até valores compatíveis com $k_{md,lim}$ não altera de forma significativa o índice de confiabilidade das seções estudadas. Para os elementos com maior altura, os índices de confiabilidade para diferentes taxas praticamente se confundem.

O índice de confiabilidade da laje de 10 cm, independentemente da taxa de armadura, ficou muito abaixo do valor estabelecido no Eurocode ($\beta_a = 3,8$). O índice de confiabilidade da laje de 20 cm também ficou abaixo do valor estabelecido no Eurocode, porém não muito abaixo. Já o índice de confiabilidade da viga estudada ficou acima do valor alvo para quase todos os casos de carregamento, exceto para valores de χ maiores do que 75%, aproximadamente.

5.5. Exemplos numéricos de lajes

5.5.1. Descrição

Neste problema foram consideradas lajes com seções retangulares, submetidas a flexão simples. Foram estudadas lajes com espessura de 10 cm, 12 cm, 15 cm, 17 cm, 19 cm e 20 cm, todas com a mesma área de armadura.

A seguir, serão apresentados os parâmetros das variáveis aleatórias envolvidas no problema. Depois, serão apresentados os resultados na forma de tabelas e gráficos. Os valores obtidos serão comparados com o valor alvo estabelecido no Eurocode.

5.5.2. Valores de entrada das variáveis aleatórias

A armadura utilizada em todas as lajes é

$$A_s = \phi 10 \text{ c } 10 = 7,85 \text{ cm}^2/\text{m} = 7,85 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{m}. \quad (5-52)$$

Na tabela 5-28 são apresentados os valores das variáveis aleatórias comuns a todos os casos analisados neste problema.

Tabela 5-28 – Valores das variáveis para os problemas

VA	Distribuição	Unidade	Média	Desvio Padrão
θ_m	Normal	-	1,02	0,0612
A_s	Normal	$10^{-4} \text{ m}^2/\text{m}$	7,85	0,1178
f_y	Normal	kN/m ²	544.500	27.225
b	Determinístico	m	1	-
f_c	Normal	kN/m ²	29.900	4.485

Os momentos solicitantes variam em função das dimensões do elemento, da taxa de armadura e do parâmetro χ . Os parâmetros da altura útil das lajes são apresentados na tabela 5-29. Foi considerado um cobrimento de 2 cm.

Tabela 5-29 - Altura útil das lajes

Laje	Parâmetros de "d" (Normal)	
	Média (m)	Desvio Padrão (m)
10 cm	0,075	0,015
12 cm	0,095	0,015
15 cm	0,125	0,015
17 cm	0,145	0,015
19 cm	0,165	0,015
20 cm	0,175	0,015

A seguir são apresentados os esforços solicitantes para cada altura de laje, em função dos valores de χ .

a) Laje com $h = 10 \text{ cm}$

Tabela 5-30 - Parâmetro dos momentos solicitantes para a laje de 10 cm

χ	VA (Valores em kN·m/m)			
	M_g (Normal)		M_q (Gumbel)	
	Média	Desvio Padrão	Média	Desvio Padrão
0,0	16,33	1,63	0,00	0,00
0,1	14,70	1,47	1,45	0,29
0,2	13,06	1,31	2,90	0,58
0,3	11,43	1,14	4,36	0,87
0,4	9,80	0,98	5,81	1,16
0,5	8,16	0,82	7,26	1,45
0,6	6,53	0,65	8,71	1,74
0,7	4,90	0,49	10,17	2,03
0,8	3,27	0,33	11,62	2,32
0,9	1,63	0,16	13,07	2,61
1,0	0,00	0,00	14,52	2,90

b) Laje com $h = 12 \text{ cm}$

Tabela 5-31 - Parâmetro dos momentos solicitantes para a laje de 12 cm

χ	VA (Valores em kN·m/m)			
	M_g (Normal)		M_q (Gumbel)	
	Média	Desvio Padrão	Média	Desvio Padrão
0,0	21,45	2,15	0,00	0,00
0,1	19,31	1,93	1,91	0,38
0,2	17,16	1,72	3,82	0,76
0,3	15,02	1,50	5,72	1,14
0,4	12,87	1,29	7,63	1,53
0,5	10,72	1,07	9,54	1,91
0,6	8,58	0,86	11,45	2,29
0,7	6,44	0,64	13,36	2,67
0,8	4,29	0,43	15,26	3,05
0,9	2,15	0,21	17,17	3,43
1,0	0,00	0,00	19,08	3,82

c) Laje com $h = 15 \text{ cm}$

Tabela 5-32 - Parâmetro dos momentos solicitantes para a laje de 15 cm

χ	VA (Valores em kN·m/m)			
	M_g (Normal)		M_q (Gumbel)	
	Média	Desvio Padrão	Média	Desvio Padrão
0,0	29,13	2,91	0,00	0,00
0,1	26,22	2,62	2,59	0,52
0,2	23,31	2,33	5,18	1,04
0,3	20,39	2,04	7,77	1,55
0,4	17,48	1,75	10,37	2,07
0,5	14,57	1,46	12,96	2,59
0,6	11,65	1,17	15,55	3,11
0,7	8,74	0,87	18,14	3,63
0,8	5,83	0,58	20,73	4,15
0,9	2,91	0,29	23,32	4,66
1,0	0,00	0,00	25,92	5,18

d) Laje com $h = 17 \text{ cm}$

Tabela 5-33 - Parâmetro dos momentos solicitantes para a laje de 17 cm

χ	VA (Valores em kN·m/m)			
	M_g (Normal)		M_q (Gumbel)	
	Média	Desvio Padrão	Média	Desvio Padrão
0,0	34,26	3,43	0,00	0,00
0,1	30,83	3,08	3,05	0,61
0,2	27,40	2,74	6,09	1,22
0,3	23,98	2,40	9,14	1,83
0,4	20,55	2,06	12,19	2,44
0,5	17,13	1,71	15,24	3,05
0,6	13,70	1,37	18,28	3,66
0,7	10,28	1,03	21,33	4,27
0,8	6,85	0,69	24,38	4,88
0,9	3,43	0,34	27,42	5,48
1,0	0,00	0,00	30,47	6,09

e) Laje com $h = 19 \text{ cm}$

Tabela 5-34 - Parâmetro dos momentos solicitantes para a laje de 19 cm

χ	VA (Valores em $\text{kN}\cdot\text{m/m}$)			
	M_g (Normal)		M_q (Gumbel)	
	Média	Desvio Padrão	Média	Desvio Padrão
0,0	39,38	3,94	0,00	0,00
0,1	35,44	3,54	3,50	0,70
0,2	31,50	3,15	7,01	1,40
0,3	27,56	2,76	10,51	2,10
0,4	23,63	2,36	14,01	2,80
0,5	19,69	1,97	17,51	3,50
0,6	15,75	1,58	21,02	4,20
0,7	11,81	1,18	24,52	4,90
0,8	7,88	0,79	28,02	5,60
0,9	3,94	0,39	31,52	6,30
1,0	0,00	0,00	35,03	7,01

f) Laje com $h = 20 \text{ cm}$

Tabela 5-35 - Parâmetro dos momentos solicitantes para a laje de 20 cm

χ	VA (Valores em $\text{kN}\cdot\text{m/m}$)			
	M_g (Normal)		M_q (Gumbel)	
	Média	Desvio Padrão	Média	Desvio Padrão
0,0	41,94	4,19	0,00	0,00
0,1	37,75	3,77	3,73	0,75
0,2	33,55	3,36	7,46	1,49
0,3	29,36	2,94	11,19	2,24
0,4	25,16	2,52	14,92	2,98
0,5	20,97	2,10	18,65	3,73
0,6	16,78	1,68	22,38	4,48
0,7	12,58	1,26	26,11	5,22
0,8	8,39	0,84	29,84	5,97
0,9	4,19	0,42	33,58	6,72
1,0	0,00	0,00	37,31	7,46

5.5.3. Resultados

As tabelas a seguir (5-36 a 5-41) apresentam os resultados obtidos nas análises, em função do parâmetro χ . Nas tabelas:

- p ($G < 0$) é a probabilidade de falha que o programa encontrou na análise feita pelo método de Monte Carlo.
- β é o índice de confiabilidade, calculado de acordo com a equação (3-3)

Os resultados são apresentados para cada caso estudado.

a) Laje com $h = 10 \text{ cm}$

Tabela 5-36 - Resultados para a laje de $h=10\text{cm}$

χ	Média ($\text{kN}\cdot\text{m/m}$)	Desvio Padrão ($\text{kN}\cdot\text{m/m}$)	p ($G < 0$)	β
0,0	12,30	6,97	0,03610	1,77
0,1	12,48	6,93	0,03320	1,80
0,2	12,67	6,92	0,03115	1,83
0,3	12,84	6,92	0,02935	1,86
0,4	13,03	6,95	0,02803	1,88
0,5	13,22	6,98	0,02694	1,89
0,6	13,40	7,03	0,02664	1,90
0,7	13,59	7,10	0,02649	1,91
0,8	13,77	7,19	0,02654	1,92
0,9	13,95	7,28	0,02729	1,92
1,0	14,13	7,40	0,02791	1,91

b) Laje com $h = 12 \text{ cm}$

Tabela 5-37- Resultados

χ	Média ($\text{kN}\cdot\text{m/m}$)	Desvio Padrão ($\text{kN}\cdot\text{m/m}$)	p ($G < 0$)	β
0,0	15,79	7,23	0,01229	2,18
0,1	16,03	7,18	0,01066	2,23
0,2	16,28	7,16	0,00963	2,27
0,3	16,51	7,16	0,00887	2,30
0,4	16,76	7,20	0,00839	2,33
0,5	17,00	7,26	0,00830	2,34
0,6	17,24	7,34	0,00863	2,35
0,7	17,49	7,46	0,00923	2,34
0,8	17,73	7,59	0,01003	2,33
0,9	17,97	7,75	0,01110	2,32
1,0	18,21	7,94	0,01241	2,29

c) Laje com $h = 15 \text{ cm}$

Tabela 5-38 - Resultados

χ	Média (kN·m/m)	Desvio Padrão (kN·m/m)	p (G < 0)	β
0,0	21,04	7,74	0,00227	2,72
0,1	21,37	7,66	0,00171	2,79
0,2	21,70	7,62	0,00140	2,85
0,3	22,03	7,63	0,00130	2,89
0,4	22,36	7,68	0,00131	2,91
0,5	22,68	7,78	0,00159	2,91
0,6	23,02	7,93	0,00195	2,90
0,7	23,33	8,13	0,00267	2,87
0,8	23,67	8,36	0,00351	2,83
0,9	24,00	8,62	0,00457	2,78
1,0	24,32	8,93	0,00594	2,72

d) Laje com $h = 17 \text{ cm}$

Tabela 5-39 - Resultados

χ	Média (kN·m/m)	Desvio Padrão (kN·m/m)	p (G < 0)	β
0,0	24,54	8,15	0,00076	3,01
0,1	24,93	8,03	0,00053	3,10
0,2	25,32	7,98	0,00040	3,17
0,3	25,69	7,99	0,00038	3,21
0,4	26,08	8,06	0,00046	3,24
0,5	26,47	8,20	0,00066	3,23
0,6	26,86	8,39	0,00100	3,20
0,7	27,25	8,64	0,00156	3,15
0,8	27,63	8,95	0,00225	3,09
0,9	28,02	9,29	0,00328	3,02
1,0	28,40	9,68	0,00450	2,93

e) Laje com $h = 19 \text{ cm}$

Tabela 5-40 - Resultados

χ	Média (kN·m/m)	Desvio Padrão (kN·m/m)	p (G < 0)	β
0,0	28,05	8,60	0,00026	3,26
0,1	28,49	8,45	0,00017	3,37
0,2	28,93	8,38	0,00013	3,45
0,3	29,37	8,40	0,00012	3,49
0,4	29,82	8,49	0,00019	3,51
0,5	30,26	8,66	0,00032	3,49
0,6	30,72	8,91	0,00061	3,45
0,7	31,14	9,21	0,00109	3,38
0,8	31,59	9,59	0,00174	3,29
0,9	32,03	10,02	0,00270	3,20
1,0	32,47	10,49	0,00387	3,10

f) Laje com $h = 20 \text{ cm}$

Tabela 5-41 - Resultados

χ	Média ($\text{kN}\cdot\text{m/m}$)	Desvio Padrão ($\text{kN}\cdot\text{m/m}$)	p (G < 0)	β
0,0	29,78	8,83	0,00016	3,37
0,1	30,26	8,67	0,00009	3,49
0,2	30,74	8,60	0,00007	3,57
0,3	31,21	8,61	0,00008	3,62
0,4	31,68	8,72	0,00013	3,63
0,5	32,16	8,90	0,00027	3,61
0,6	32,63	9,18	0,00052	3,56
0,7	33,10	9,51	0,00093	3,48
0,8	33,57	9,92	0,00154	3,38
0,9	34,04	10,39	0,00243	3,28
1,0	34,51	10,91	0,00353	3,16

Na figura 5-2, são apresentados na forma gráfica os índices de confiabilidade para cada laje em função do parâmetro χ .

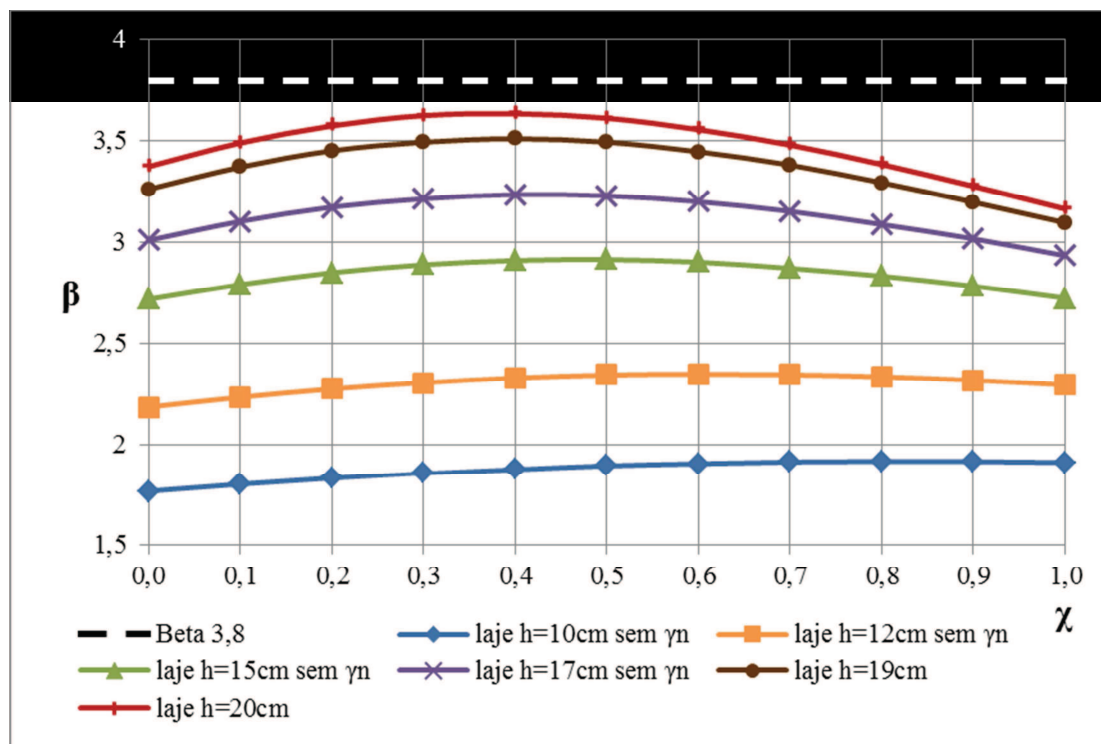


Figura 5-2 - Índice de confiabilidade

Algumas conclusões podem ser tomadas.

- Nenhuma das lajes atingiu o índice de confiabilidade estabelecido pelo Eurocode EN 1990 (2001);
- Quanto maior a espessura da laje, maior é a segurança. Esta maior segurança se deve ao fato de o desvio na posição da armadura ter menor influência relativa no caso de lajes mais espessas;
- As lajes mais espessas apresentam o maior valor do índice de confiabilidade para um valor de χ em torno de 0,4. Consultando as tabelas, pode-se verificar que o maior índice de confiabilidade não corresponde à menor probabilidade de falha.
- As lajes, em geral, são menos seguras quando quase a totalidade da solicitação é devida às cargas acidentais.

Para complementar, a figura 5-3 apresenta a influência das variáveis na função de falha, para as lajes de 10cm e 20cm e para a viga com 20cm x 50cm, quando $\chi = 0,5$. Esta influência é obtida pelos fatores de importância, que representam o quadrado dos cossenos diretores da superfície de falha no ponto de falha, fornecidos pelo método FORM. A soma de todos os fatores de influência é igual a 1. Pode-se perceber que a altura útil tem muita importância para a laje de 10cm e que essa importância vai diminuindo à medida que a altura da seção aumenta.

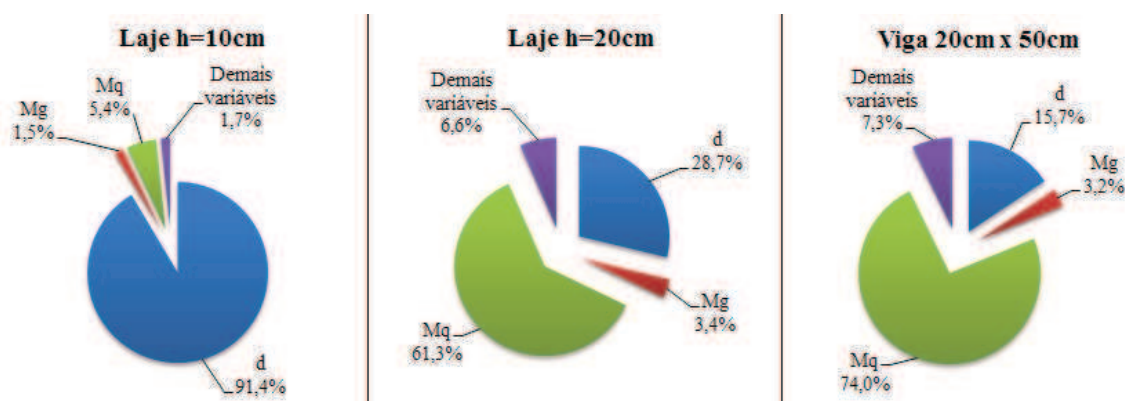


Figura 5-3 – Fator de importância das variáveis na função de falha

5.6. Exemplos numéricos de lajes com o coeficiente γ_n

5.6.1. Descrição

Neste item serão reanalisadas as lajes com espessuras de 10 cm, 12 cm, 15 cm, 17 cm, com armadura de ϕ 10 c 10, dimensionadas com o coeficiente γ_n , conforme apresentado em BUENO (2011). Este coeficiente é utilizado para majorar os esforços solicitantes finais de cálculo. Ele é dado pela mesma expressão do coeficiente γ_n de pilares da NBR 6118 (2007) e é válido para lajes com espessura $10\text{ cm} \leq h \leq 19\text{ cm}$.

$$\gamma_n = 1,95 - 0,05 \cdot h \quad (5-53)$$

A seguir, serão apresentados os parâmetros das variáveis aleatórias envolvidas no problema. Depois, serão apresentados os resultados na forma de tabelas e gráficos. Os valores obtidos serão comparados com o valor alvo estabelecido no Eurocode.

5.6.2. Valores das variáveis aleatórias

Na tabela 5-42 são apresentados os valores que são usados para todos os casos estudados neste item. Os esforços foram calculados para uma armadura de ϕ 10 c 10.

Tabela 5-42 - Variáveis aleatórias adotadas

VA	Distribuição	Unidade	Média	Desvio Padrão
θ_m	Normal	-	1,02	0,0612
A_s	Normal	$10^{-4}\text{ m}^2/\text{m}$	7,85	0,1178
f_y	Normal	kN/m^2	544.500	27.225
b	Determinístico	m	1	0
f_c	Normal	kN/m^2	29.900	4.485

Foi considerado um cobrimento de 2,0 cm para as lajes. Os parâmetros da altura útil adotada em cada laje são resumidos na tabela 5-43:

Tabela 5-43 - Altura útil das lajes

Laje	Parâmetros de "d" (Normal)	
	Média (m)	Desvio Padrão (m)
10 cm	0,075	0,015
12 cm	0,095	0,015
15 cm	0,125	0,015
17 cm	0,145	0,015

a) Laje com $h = 10 \text{ cm}$

Tabela 5-44 - Variáveis aleatórias dos momentos solicitantes para a laje de 10 cm

χ	VA (Valores em kN·m/m)			
	M_g (Normal)		M_q (Gumbel)	
	Média	Desvio Padrão	Média	Desvio Padrão
0,0	11,26	1,13	0,00	0,00
0,1	10,13	1,01	1,00	0,20
0,2	9,01	0,90	2,00	0,40
0,3	7,88	0,79	3,01	0,60
0,4	6,76	0,68	4,01	0,80
0,5	5,63	0,56	5,01	1,00
0,6	4,50	0,45	6,01	1,20
0,7	3,38	0,34	7,01	1,40
0,8	2,25	0,23	8,01	1,60
0,9	1,13	0,11	9,02	1,80
1,0	0,00	0,00	10,02	2,00

b) Laje com $h = 12 \text{ cm}$

Tabela 5-45 - Variáveis aleatórias dos momentos solicitantes para a laje de 12 cm

χ	VA (Valores em kN·m/m)			
	M_g (Normal)		M_q (Gumbel)	
	Média	Desvio Padrão	Média	Desvio Padrão
0,0	15,89	1,59	0,00	0,00
0,1	14,30	1,43	1,41	0,28
0,2	12,71	1,27	2,83	0,57
0,3	11,12	1,11	4,24	0,85
0,4	9,53	0,95	5,65	1,13
0,5	7,94	0,79	7,07	1,41
0,6	6,36	0,64	8,48	1,70
0,7	4,77	0,48	9,89	1,98
0,8	3,18	0,32	11,31	2,26
0,9	1,59	0,16	12,72	2,54
1,0	0,00	0,00	14,13	2,83

c) Laje com $h = 15 \text{ cm}$

Tabela 5-46 - Variáveis aleatórias dos momentos solicitantes para a laje de 15 cm

χ	VA (Valores em kN·m/m)			
	M_g (Normal)		M_q (Gumbel)	
	Média	Desvio Padrão	Média	Desvio Padrão
0,0	24,28	2,43	0,00	0,00
0,1	21,85	2,19	2,16	0,43
0,2	19,42	1,94	4,32	0,86
0,3	16,99	1,70	6,48	1,30
0,4	14,57	1,46	8,64	1,73
0,5	12,14	1,21	10,80	2,16
0,6	9,71	0,97	12,96	2,59
0,7	7,28	0,73	15,12	3,02
0,8	4,86	0,49	17,28	3,46
0,9	2,43	0,24	19,44	3,89
1,0	0,00	0,00	21,60	4,32

d) Laje com $h = 17 \text{ cm}$

Tabela 5-47 - Variáveis aleatórias dos momentos solicitantes para a laje de 17 cm

χ	VA (Valores em kN·m/m)			
	M_g (Normal)		M_q (Gumbel)	
	Média	Desvio Padrão	Média	Desvio Padrão
0,0	31,14	3,11	0,00	0,00
0,1	28,03	2,80	2,77	0,55
0,2	24,91	2,49	5,54	1,11
0,3	21,80	2,18	8,31	1,66
0,4	18,69	1,87	11,08	2,22
0,5	15,57	1,56	13,85	2,77
0,6	12,46	1,25	16,62	3,32
0,7	9,34	0,93	19,39	3,88
0,8	6,23	0,62	22,16	4,43
0,9	3,11	0,31	24,93	4,99
1,0	0,00	0,00	27,70	5,54

5.6.3. Resultados

As tabelas a seguir (5-48 a 5-51) apresentam os resultados obtidos nas análises, em função do parâmetro χ . Nas tabelas:

- $p (G < 0)$ é a probabilidade de falha que o programa encontrou na análise feita pelo método de Monte Carlo.
- β é o índice de confiabilidade, calculado de acordo com a equação (3-3)

Os resultados são apresentados para cada caso estudado.

a) Laje com $h = 10 \text{ cm}$

Tabela 5-48 - Resultados para a laje com $h=10\text{cm}$ e coeficiente γ_n

χ	Média (kN·m/m)	Desvio Padrão (kN·m/m)	$p (G < 0)$	β
0,0	17,46	6,90	0,004595	2,53
0,1	17,59	6,89	0,004182	2,55
0,2	17,72	6,88	0,003970	2,57
0,3	17,85	6,88	0,003718	2,59
0,4	17,97	6,89	0,003620	2,61
0,5	18,10	6,91	0,003523	2,62
0,6	18,22	6,94	0,003444	2,63
0,7	18,35	6,97	0,003456	2,63
0,8	18,48	7,01	0,003481	2,64
0,9	18,60	7,06	0,003568	2,64
1,0	18,73	7,12	0,003799	2,63

b) Laje com $h = 12 \text{ cm}$

Tabela 5-49 - Resultados para a laje com $h=12\text{cm}$ e coeficiente γ_n

χ	Média (kN·m/m)	Desvio Padrão (kN·m/m)	$p (G < 0)$	β
0,0	21,46	7,14	0,000816	3,01
0,1	21,64	7,11	0,000714	3,04
0,2	21,83	7,09	0,000626	3,08
0,3	22,00	7,10	0,000577	3,10
0,4	22,18	7,12	0,000578	3,12
0,5	22,36	7,15	0,000582	3,13
0,6	22,54	7,20	0,000603	3,13
0,7	22,72	7,27	0,000650	3,13
0,8	22,90	7,34	0,000786	3,12
0,9	23,07	7,43	0,000912	3,10
1,0	23,26	7,54	0,001125	3,08

c) Laje com $h = 15 \text{ cm}$

Tabela 5-50 - Resultados para a laje com $h=15\text{cm}$ e coeficiente γ_n

χ	Média ($\text{kN}\cdot\text{m/m}$)	Desvio Padrão ($\text{kN}\cdot\text{m/m}$)	p (G < 0)	β
0,0	25,99	7,62	0,000139	3,41
0,1	26,27	7,56	0,000109	3,48
0,2	26,54	7,53	0,000086	3,52
0,3	26,81	7,54	0,000084	3,55
0,4	27,09	7,58	0,000090	3,57
0,5	27,36	7,66	0,000113	3,57
0,6	27,64	7,77	0,000164	3,56
0,7	27,91	7,90	0,000259	3,53
0,8	28,18	8,07	0,000409	3,49
0,9	28,45	8,26	0,000633	3,44
1,0	28,73	8,48	0,000918	3,39

d) Laje com $h = 17 \text{ cm}$

Tabela 5-51 - Resultados para a laje com $h=17\text{cm}$ e coeficiente γ_n

χ	Média ($\text{kN}\cdot\text{m/m}$)	Desvio Padrão ($\text{kN}\cdot\text{m/m}$)	p (G < 0)	β
0,0	27,71	8,05	0,000122	3,44
0,1	28,07	7,96	0,000078	3,53
0,2	28,42	7,91	0,000061	3,59
0,3	28,77	7,92	0,000061	3,63
0,4	29,12	7,98	0,000079	3,65
0,5	29,47	8,10	0,000132	3,64
0,6	29,82	8,27	0,000237	3,61
0,7	30,17	8,48	0,000405	3,56
0,8	30,52	8,73	0,000689	3,49
0,9	30,87	9,03	0,001117	3,42
1,0	31,22	9,35	0,001656	3,34

Na figura 5-4, são apresentados os índices de confiabilidade na forma gráfica para cada laje em função da variável χ . Foi incluída também a laje com espessura de 19 cm do item (5.5), que possui um coeficiente $\gamma_n = 1,0$.

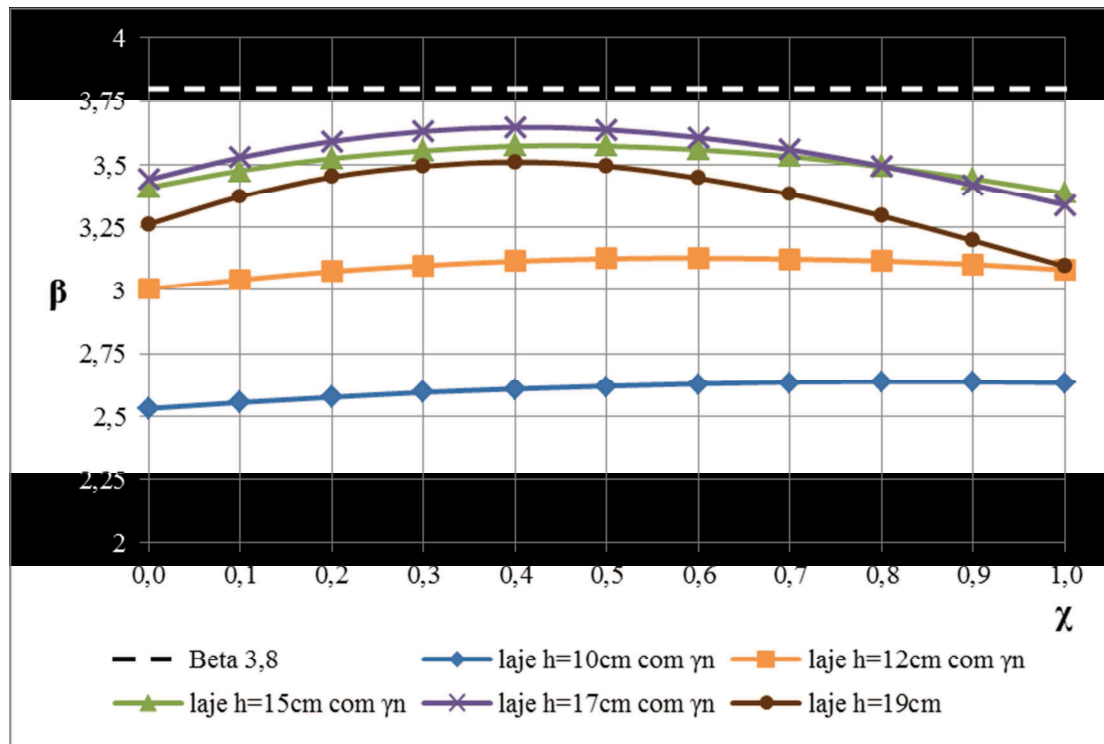


Figura 5-4 - Índice de confiabilidade para os casos analisados

Algumas conclusões podem ser tomadas.

- Mesmo considerando o coeficiente γ_n , nenhuma das lajes atingiu o índice de confiabilidade estabelecido em normas internacionais.
- Em geral, quanto maior a espessura da laje, maior é a segurança. Percebe-se, entretanto, que os índices de confiabilidade da laje de 15 cm e de 17 cm ficaram bem próximos. Para casos em que a carga acidental representa quase a totalidade do carregamento aplicado, a laje de 15 cm é, inclusive, mais segura do que a laje de 17 cm.
- A laje com espessura de 19 cm apresenta um índice de confiabilidade menor do que as lajes com 15 cm e 17 cm com o coeficiente γ_n .
- As lajes com espessura de 10 cm e 12 cm não apresentam variação significativa do índice de confiabilidade em função do parâmetro χ .

No item 5.8, as curvas obtidas para as lajes sem coeficiente γ_n e com o coeficiente são comparadas.

5.7. Exemplos numéricos de vigas

5.7.1. Descrição

Neste item serão apresentados os índices de confiabilidade das seções mais solicitadas de vigas submetidas à flexão simples. As vigas estudadas tem forma retangular, com dimensões 20 cm x 50 cm e 20 cm x 70 cm.

A seguir, serão apresentados os parâmetros das variáveis aleatórias envolvidas no problema. Depois, serão apresentados os resultados na forma de tabela e gráfico. Os valores obtidos serão comparados com o valor alvo estabelecido no Eurocode.

5.7.2. Valores de entrada

Na tabela 5-52 são apresentados os valores das variáveis aleatórias comuns a todos os casos analisados neste problema.

Tabela 5-52 – Valores das variáveis para os problemas

VA	Distribuição	Unidade	Média	Desvio Padrão
θ_m	Normal	-	1,02	0,0612
A_s	Normal	10^{-4} m^2	9,42	0,1414
f_y	Normal	kN/m ²	544.500	27.225
b	Normal	m	0,2	0,01
f_c	Normal	kN/m ²	29.900	4.485

Para ambas as vigas, a armadura utilizada foi

$$A_s = 3 \phi 20 = 9,425 \text{ cm}^2 = 9,425 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2. \quad (5-54)$$

Os parâmetros da altura útil são apresentados na tabela 5-53:

Tabela 5-53 - Parâmetros da altura útil (d)

Viga	Parâmetros de “d” (Normal)	
	Média (m)	Desvio Padrão (m)
20 x 50	0,465	0,03
20 x 70	0,665	0,03

Os esforços solicitantes são apresentados a seguir, nas tabelas 5-54 e 5-55.

a) Viga com 20 cm x 50 cm

Tabela 5-54 - Média e desvio padrão das solicitações

χ	VA (Valores em kN·m)			
	M_g (Normal)		M_q (Gumbel)	
	Média	Desvio Padrão	Média	Desvio Padrão
0,0	122,17	12,22	0,00	0,00
0,1	109,96	11,00	10,87	2,17
0,2	97,74	9,77	21,74	4,35
0,3	85,52	8,55	32,60	6,52
0,4	73,30	7,33	43,47	8,69
0,5	61,09	6,11	54,34	10,87
0,6	48,87	4,89	65,21	13,04
0,7	36,65	3,67	65,21	13,04
0,8	24,43	2,44	76,07	15,21
0,9	12,22	1,22	86,94	17,39
1,0	0,00	0,00	97,81	19,56

b) Viga com 20 cm x 70 cm

Tabela 5-55 - Média e desvio padrão das solicitações - viga 20 x 70

χ	VA (Valores em kN·m)			
	M_g (Normal)		M_q (Gumbel)	
	Média	Desvio Padrão	Média	Desvio Padrão
0,0	183,64	18,36	0,00	0,00
0,1	165,28	16,53	16,34	3,27
0,2	146,91	14,69	32,67	6,53
0,3	128,55	12,85	49,01	9,80
0,4	110,18	11,02	65,34	13,07
0,5	91,82	9,18	81,68	16,34
0,6	73,46	7,35	98,01	19,60
0,7	55,09	5,51	98,01	19,60
0,8	36,73	3,67	114,35	22,87
0,9	18,36	1,84	130,68	26,14
1,0	0,00	0,00	147,02	29,40

5.7.3. Resultados

As tabelas a seguir (5-56 e 5-57) apresentam os resultados obtidos nas análises.

a) Viga com 20 cm x 50 cm

Tabela 5-56 - Resumo dos resultados para a viga 20 x 50 cm

χ	Média (kN·m)	Desvio Padrão (kN·m)	p (G < 0)	β
0,0	91,58	23,54	0,000014	3,89
0,1	92,96	23,02	0,000006	4,04
0,2	94,32	22,79	0,000006	4,14
0,3	95,71	22,84	0,000008	4,19
0,4	97,08	23,17	0,000025	4,19
0,5	98,46	23,77	0,000084	4,14
0,6	99,83	24,61	0,000204	4,06
0,7	101,20	25,71	0,000449	3,94
0,8	102,60	26,97	0,000860	3,80
0,9	104,00	28,42	0,001440	3,66
1,0	105,40	30,01	0,002275	3,51

b) Viga com 20 cm x 70 cm

Tabela 5-57 - Resumo dos resultados para a viga 20 x 70 cm

χ	Média (kN·m)	Desvio Padrão (kN·m)	p (G < 0)	β
0,0	133,60	30,36	0,000001	4,40
0,1	135,60	29,49	0,000001	4,60
0,2	137,70	29,06	0,000000	4,74
0,3	139,80	29,15	0,000001	4,80
0,4	141,85	29,71	0,000010	4,78
0,5	143,90	30,77	0,000042	4,68
0,6	146,00	32,26	0,000147	4,53
0,7	148,10	34,10	0,000350	4,34
0,8	150,10	36,25	0,000715	4,14
0,9	152,20	38,69	0,001293	3,93
1,0	154,30	41,30	0,002128	3,74

Na figura 5-5, são apresentados os índices de confiabilidade na forma gráfica para cada viga em função da variável χ .

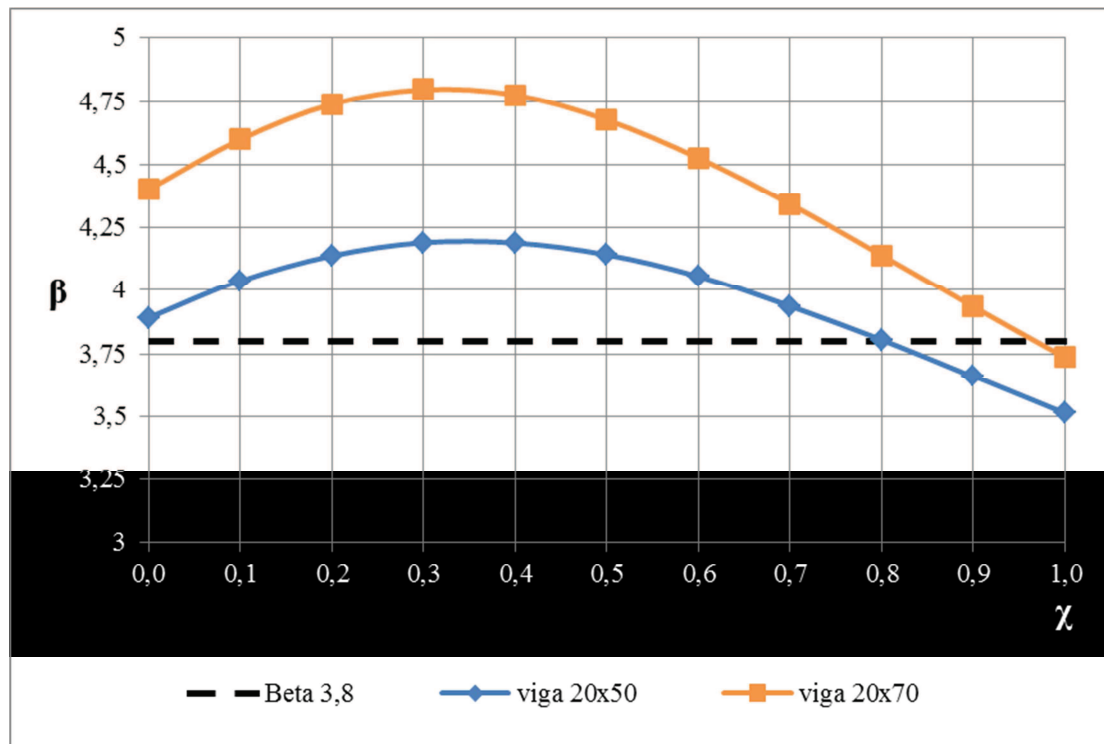


Figura 5-5 – Índice de confiabilidade das vigas

Algumas conclusões podem ser tomadas.

- Ambas as vigas ficaram acima do índice de confiabilidade para quase todos os casos de carregamento. Ficaram abaixo, entretanto, quando a carga variável representava quase a totalidade do carregamento.
- Quanto maior a altura da viga, maior é a segurança. Esta maior segurança se deve ao fato de o desvio na posição da armadura ter menor influência relativa no caso de vigas com maior altura;
- As vigas são mais seguras para um valor de χ em torno de 0,3 a 0,4.
- A situação mais desfavorável ocorre quando quase a totalidade do esforço solicitante é devido às cargas acidentais.

5.8. Comparação entre os problemas de flexão

A seguir, são apresentados dois gráficos (Figura 5-6 e 5-7) para comparação entre os problemas de flexão analisados.

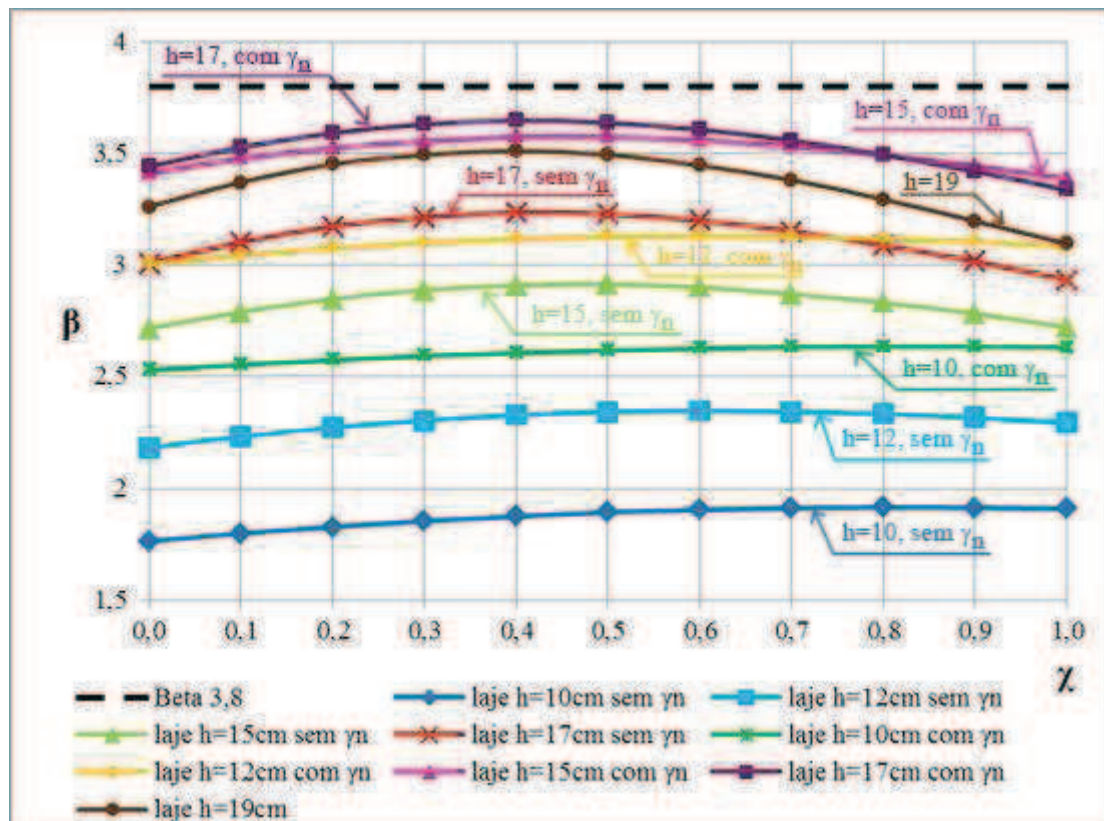


Figura 5-6 - Índice de confiabilidade – influência do coeficiente γ_n nas lajes

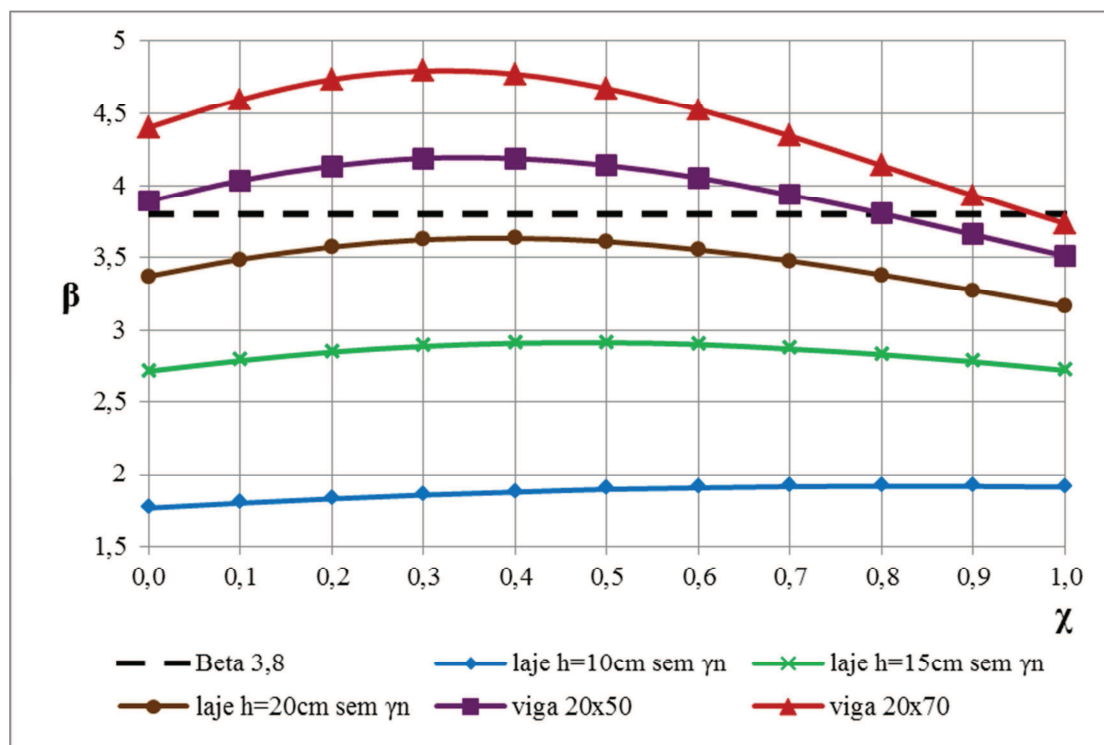


Figura 5-7 - Índices de confiabilidade – influência das dimensões do elemento

Algumas conclusões podem ser tomadas.

- Da figura 5-1, verifica-se que a taxa de armadura não influencia de forma significativa o índice de confiabilidade do elemento estrutural.
- Nenhuma das lajes atingiu o índice de confiabilidade estabelecido no Eurocode, mesmo com a consideração do coeficiente γ_n . Já as vigas ficaram acima do valor estabelecido para quase todas as condições de carregamento.
- O coeficiente γ_n melhora de forma significativa a segurança das lajes, porém não é suficiente para atingir o valor alvo.
- Sem a consideração do coeficiente γ_n , as lajes com maior espessura são mais seguras. Porém, com a consideração do coeficiente, lajes com menor espessura podem ser mais seguras. Por exemplo, a laje de 15 cm com coeficiente γ_n é mais segura que a laje com 19 cm.
- Em geral, o índice de confiabilidade atinge o menor valor quando a totalidade da solicitação é oriunda de cargas variáveis.

6. FLEXO-COMPRESSÃO

A estimativa da probabilidade de falha das seções mais solicitadas à flexo-compressão reta dos elementos estruturais será feita utilizando o método de Monte Carlo, com auxílio do programa VaP. Uma descrição do programa pode ser encontrada no Anexo C. É importante ressaltar que as probabilidades de falha estimadas referem-se somente à seção mais solicitada de cada caso estudado.

No próximo item serão explicados de forma detalhada os casos estudados. Em seguida, será deduzida a função de falha para o modo de comportamento estudado e apresentados o tipo de distribuição e os parâmetros de cada variável aleatória envolvida. Por fim, serão apresentados os resultados e serão feitos alguns comentários e conclusões.

6.1. Casos estudados

Neste capítulo, serão estudados elementos submetidos à flexo-compressão. O principal exemplo de elemento submetido à flexo-compressão é o pilar. Os elementos estudados neste item apresentam armaduras dispostas no topo e na parte inferior da seção, como ilustra a figura 6-1.

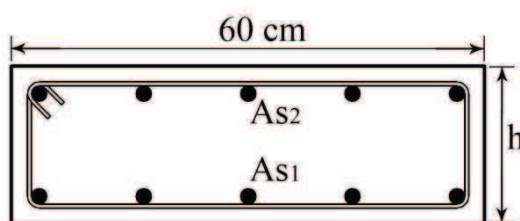


Figura 6-1 - Seção transversal

Serão estudadas três seções de elementos submetidos à flexo-compressão com 60 cm de largura e diferentes valores de altura: 12 cm, 15 cm e 20 cm. Pode-se notar que, para as duas primeiras seções, os esforços de cálculo devem ser majorados por um coeficiente γ_n , de acordo com a NBR 6118 (2007). Como indica a figura 6-1, a armadura ficará disposta ao longo do maior lado.

Para cada uma das seções, serão estudadas duas configurações de deformação, sendo uma no domínio 3 e outra no domínio 4. Fixando as deformações na seção, são determinados os esforços resistentes e a excentricidade, definida por:

$$e = \frac{M_d}{N_d}. \quad (6-1)$$

A excentricidade será considerada constante em cada caso estudado.

Nos exemplos a seguir, os elementos, submetidos à flexo-compressão, apresentam solicitações devidas às ações permanentes e a uma ação variável (acidental). Para estudar a influência do tipo de carregamento, será utilizada uma variável auxiliar χ , definida como a razão entre a carga variável característica e a solicitação característica total:

$$\chi = \frac{M_{qk}}{M_{gk} + M_{qk}} \quad (6-2)$$

O valor de χ nos exemplos varia de 0 a 1, porém os valores de χ próximos a 0 e a 1 apresentam baixa probabilidade de ocorrência nas estruturas reais.

6.2. Dados gerais

6.2.1. Função de falha

A função de falha que será deduzida é válida para os domínios 2, 3 e 4 e será escrita em termos de momentos fletores. A figura 6-2 ilustra todos os esforços que atuam na seção, com os respectivos sentidos que serão usados na dedução a seguir.

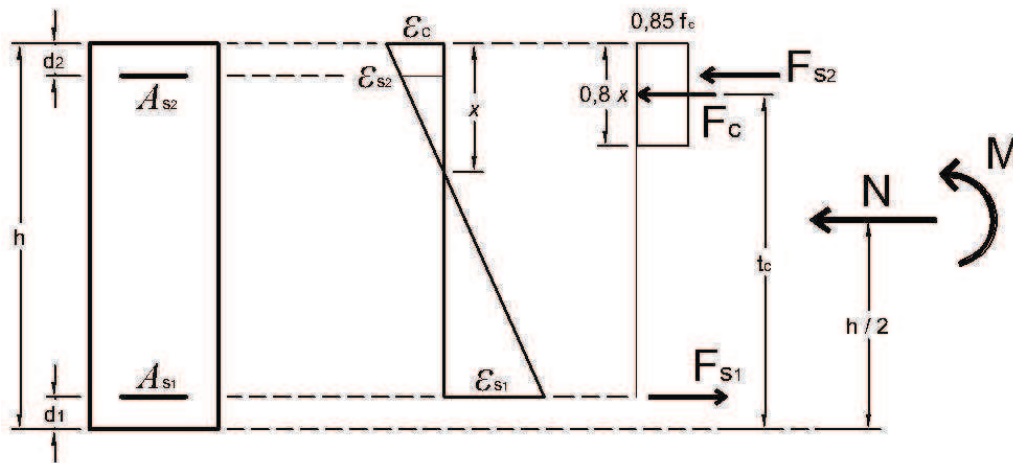


Figura 6-2 – Solicitações na seção transversal

As equações de compatibilidade de momentos fletores em relação à fibra inferior e de esforços normais, respectivamente, são:

$$M + N \cdot \frac{h}{2} = F_c \cdot t_c + F_{s2} \cdot t_2 - F_{s1} \cdot t_1 \quad (6-3)$$

$$N = F_c + F_{s2} - F_{s1} \quad (6-4)$$

onde:

- M é o momento fletor solicitante;
- N é o esforço normal solicitante;
- h é a altura da seção;
- F_c é força resultante no concreto;
- t_c é a distância da resultante da força no concreto em relação à base da seção;
- F_{si} é a força na armadura i ;
- t_i é a distância da armadura i em relação à base da seção.

Para se trabalhar somente com uma variável de esforço, a normal será relacionada com o momento fletor através da excentricidade, conforme (6-1). A excentricidade será considerada constante em cada caso estudado. Assim, o vetor dos esforços solicitantes será dado por

$$\mathbf{S} = (N_S, M_S) = \left(\frac{M_S}{e}, M_S \right) \quad (6-5)$$

e o vetor dos esforços resistentes será dado por

$$\mathbf{R} = (N_R, M_R) = \left(\frac{M_R}{e}, M_R \right). \quad (6-6)$$

Desta forma, os vetores da solicitação e da resistência são colineares e a falha irá ocorrer quando o vetor das solicitações for maior do que o vetor da resistência. Levando isto em consideração, pode-se escrever a função de falha a partir de (6-3), passando os esforços solicitantes para o outro lado da igualdade e substituindo os esforços nas armaduras e no concreto por aqueles que são desenvolvidos na ruptura.

$$Z = F_c \cdot t_c + F_{s2} \cdot t_2 - F_{s1} \cdot t_1 - N \cdot \frac{h}{2} - M \quad (6-7)$$

Deve-se agora escrever a função de falha em termos das variáveis básicas. O valor da força de compressão no concreto pode ser obtido a partir da equação (6-4), em função do esforço normal e das forças nas armaduras. O valor de t_c é dado por

$$t_c = h - 0,4 \cdot x \quad (6-8)$$

e o valor de x é dado pela expressão

$$x = \frac{F_c}{0,85 \cdot f_c \cdot b \cdot 0,8} = \frac{N + F_{s1} - F_{s2}}{0,85 \cdot f_c \cdot b \cdot 0,8}. \quad (6-9)$$

Substituindo, então, (6-9) em (6-8), t_c pode ser reescrito como

$$t_c = h - \frac{N + F_{s1} - F_{s2}}{1,7 \cdot f_c \cdot b}. \quad (6-10)$$

Utilizando (6-1) e (6-10) em (6-7), chega-se à expressão

$$Z = \left(\frac{M}{e} + F_{s1} - F_{s2} \right) \cdot \left(h - \frac{\frac{M}{e} + F_{s1} - F_{s2}}{1,7 \cdot f_c \cdot b} \right) - F_{s1} \cdot t_1 + F_{s2} \cdot t_2 - \frac{M}{e} \cdot \frac{h}{2} - M. \quad (6-11)$$

Os esforços serão divididos em uma parcela devida à carga permanente e outra parcela devida à carga acidental, conforme a expressão

$$M = M_g + M_q \quad (6-12)$$

e as forças nas armaduras serão dadas por

$$F_{s1} = A_{s1} \cdot |\sigma_{s1}| \cdot e \quad (6-13)$$

$$F_{s2} = A_{s2} \cdot |\sigma_{s2}|, \quad (6-14)$$

com as tensões em módulo. Os valores de t_i serão dados por

$$t_1 = d_1 \quad (6-15)$$

e

$$t_2 = h - d_2, \quad (6-16)$$

conforme indicado na figura 6-3.

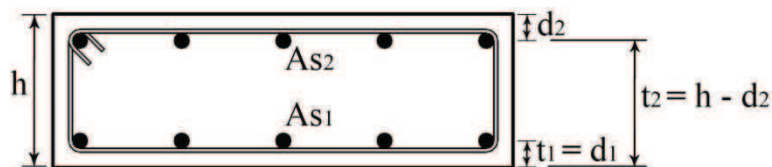


Figura 6-3 - Distâncias d_1 e d_2

Substituindo (6-13) e (6-14) e incluindo uma variável aleatória θ_m que representa a incerteza do modelo, a função de falha, na forma final, é:

$$Z = \theta_m \left[\left(\frac{M_g + M_q}{e} + A_{s1} \cdot |\sigma_{s1}| - A_{s2} \cdot |\sigma_{s2}| \right) \cdot \left(h - \frac{\frac{M_g + M_q}{e} + A_{s1} \cdot |\sigma_{s1}| - A_{s2} \cdot |\sigma_{s2}|}{1,7 \cdot f_c \cdot b} \right) - A_{s1} \cdot |\sigma_{s1}| \cdot t_1 \right. \\ \left. + A_{s2} \cdot |\sigma_{s2}| \cdot t_2 - (M_g + M_q) \cdot \left(1 + \frac{h}{2 \cdot e} \right) \right] \quad (6-17)$$

Para facilitar a compreensão, a tabela 6-1 apresenta a descrição de todos os parâmetros da função.

Tabela 6-1 - Descrição das variáveis aleatórias

Variável	Descrição
θ_m	Incerteza do modelo
A_{si}	Área de armadura na camada i
$ \sigma_{si} $	Valor em módulo da tensão na armadura na camada i
h	Altura da seção
b	Largura da seção
f_c	Resistência do concreto à compressão
M_g	Momento fletor solicitante devido às cargas permanentes
M_q	Momento fletor solicitante devido às cargas acidentais
d_i	Posição da armadura medida em relação ao bordo mais próximo
e	Excentricidade do esforço

6.2.2. Variáveis aleatórias

Na tabela (6-2) são apresentados alguns dados das variáveis aleatórias, como a distribuição e os parâmetros adotados, juntamente com as fontes dos valores. O termo δ representa o coeficiente de variação. Foi indicado ou o coeficiente de variação ou o desvio padrão da variável, em função do dado disponível nas fontes consultadas. A carga acidental considerada é referente a uma edificação residencial.

Tabela 6-2 - Variáveis aleatórias adotadas

VA	Distribuição	Unidade	Valor característico	Média	δ	Desvio padrão	Fonte
θ_m	Normal	-	1	1	0,08	-	(1)
A_{si}	Normal	m ²	A_s	A_s	0,015	-	(1)
σ_{si}	Normal	kN/m ²	$f_{yk} = 500.000$	$1,089 f_{yk}$	0,05	-	(1)
h	Normal	m	h	h	-	0,01	(1)
b	Normal	m	b	b	0,04	-	(1)
f_c	Normal	kN/m ²	$f_{ck} = 25.000$	$1,196 f_{ck}$	0,15	-	(1)
M_g	Normal	kN·m	M_g	$1,05 M_g$	0,1	-	(1)
M_q	Gumbel	kN·m	M_q	$0,934 M_q$	0,2	-	(1)
d_i	Normal	m	d_i	d_i	0,125	-	(1)
e	Determinístico	m	e	-	-	-	-

(1) STUCCHI E SANTOS (2011)

Os valores específicos serão apresentados em cada caso estudado.

6.2.3. Número de amostras

O número de amostras foi estimado no item 3.6.3. Considerando que a função de falha tem 12 variáveis aleatórias, o número mínimo de simulações a ser utilizado deve ser de:

$$N_{Total} = 12 \cdot 43000 = 516.000 \quad (6-18)$$

Nos problemas estudados foram feitas 4.000.000 repetições, um número bem maior do que o número de tentativas iniciais sugeridas.

6.2.4. Determinação dos esforços solicitantes

Os esforços foram determinados com o auxílio de uma planilha de Flexão Composta para as configurações de deformação da seção estudadas.

6.3. Descrição do programa utilizado

O programa utilizado nas análises foi o VaP 1.6 e sua descrição pode ser encontrada no Anexo C.

6.4. Exemplos numéricos de flexo-compressão de pilares

A seguir, são apresentados os parâmetros das variáveis aleatórias envolvidas no problema. Depois, são apresentados os resultados na forma de tabela e gráfico. Os valores obtidos serão comparados com o valor alvo estabelecido no Eurocode.

6.4.1. Descrição

Neste item serão calculados os índices de confiabilidade das seções de pilares descritas no item 6.1. As deformações que serão consideradas para as diferentes seções são:

- I) Domínio 3 - $\varepsilon_c = -3,5\text{‰}$ e $\varepsilon_{s1} = 3,0\text{‰}$
- II) Domínio 4 - $\varepsilon_c = -3,5\text{‰}$ e $\varepsilon_{s1} = 1,0\text{‰}$

As deformações foram consideradas constantes. Os esforços considerados para as armaduras na análise pelo método de Monte Carlo foram determinados a partir das deformações no dimensionamento. O módulo de elasticidade do aço foi considerado determinístico por ter um coeficiente de variação pequeno ($\delta = 0,03$), de acordo com o JCSS (2006).

A excentricidade dos esforços, determinada no dimensionamento, também foi considerada constante.

6.4.2. Valores de entrada

Na tabela 6-3 são apresentados os valores das variáveis aleatórias comuns a todos os casos analisados neste problema.

Tabela 6-3 – Valores das variáveis para os problemas

VA	Distribuição	Unidade	Média	Desvio Padrão
θ_m	Normal	-	1	0,08
A_{s1}/A_{s2}	Normal	10^{-4} m^2	6,136	0,0920
b	Normal	m	0,6	0,024
f_c	Normal	kN/m ²	29.900	4.485
d_1/d_2	Normal	m	0,04	0,005

Para cada nível de armadura, a área de aço vale

$$A_{si} = 5 \phi 12,5 = 6,136 \text{ cm}^2 = 6,136 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2. \quad (6-19)$$

A altura total da peça para cada caso é apresentada na tabela 6-4.

Tabela 6-4 - Altura dos pilares

Pilar	Parâmetros de "h" (Normal)	
	Média (m)	Desvio Padrão (m)
12 x 60	0,12	0,01
15 x 60	0,15	0,01
20 x 60	0,2	0,01

Os parâmetros das demais variáveis aleatórias serão apresentados a seguir em função da dimensão da seção.

a) Pilar 12 x 60

O coeficiente γ_n vale:

$$\gamma_n = 1,95 - 0,05 \cdot 12 = 1,35 \quad (6-20)$$

Para o caso do domínio 3, foram considerados os parâmetros das tabelas 6-5 e 6-6.

Tabela 6-5 – Tensões e excentricidade para o pilar 12 cm x 60 cm – Domínio 3

VA	Distribuição	Unidade	Média	Desvio Padrão
σ_{s1}	Normal	kN/m ²	544.500	27.225
σ_{s2}	Normal	kN/m ²	52.500	2.625
e	Determinístico	m	0,2447	-

Tabela 6-6 - Parâmetros dos momentos para o pilar de 12 cm x 60 cm – Domínio 3

χ	VA (Valores em kN·m)			
	M_g (Normal)		M_q (Gumbel)	
	Média	Desvio Padrão	Média	Desvio Padrão
0	10,778	1,078	0,000	0,000
0,1	9,700	0,970	0,959	0,192
0,2	8,622	0,862	1,917	0,383
0,3	7,544	0,754	2,876	0,575
0,4	6,467	0,647	3,835	0,767
0,5	5,389	0,539	4,794	0,959
0,6	4,311	0,431	5,752	1,150
0,7	3,233	0,323	6,711	1,342
0,8	2,156	0,216	7,670	1,534
0,9	1,078	0,108	8,628	1,726
1,0	0,000	0,000	9,587	1,917

Para o caso do domínio 4, foram considerados os parâmetros das tabelas 6-7 e 6-8.

Tabela 6-7 – Tensões e excentricidade para o pilar 12 cm x 60 cm – Domínio 4

VA	Distribuição	Unidade	Média	Desvio Padrão
σ_{s1}	Normal	kN/m ²	210.000	10.500
σ_{s2}	Normal	kN/m ²	262.500	13.125
e	Determinístico	m	0,0447	-

Tabela 6-8 - Parâmetros dos momentos para o pilar de 12 cm x 60 cm – Domínio 4

χ	VA (Valores em kN·m)			
	M_g (Normal)		M_q (Gumbel)	
	Média	Desvio Padrão	Média	Desvio Padrão
0	12,067	1,207	0,000	0,000
0,1	10,860	1,086	1,073	0,215
0,2	9,653	0,965	2,147	0,429
0,3	8,447	0,845	3,220	0,644
0,4	7,240	0,724	4,293	0,859
0,5	6,033	0,603	5,367	1,073
0,6	4,827	0,483	6,440	1,288
0,7	3,620	0,362	7,514	1,503
0,8	2,413	0,241	8,587	1,717
0,9	1,207	0,121	9,660	1,932
1,0	0,000	0,000	10,734	2,147

b) Pilar 15 x 60

O coeficiente γ_n vale:

$$\gamma_n = 1,95 - 0,05 \cdot 15 = 1,20 \quad (6-21)$$

Para o caso do domínio 3, foram considerados os parâmetros das tabelas 6-9 e 6-10.

Tabela 6-9 – Tensões e excentricidade para o pilar 15 cm x 60 cm – Domínio 3

VA	Distribuição	Unidade	Média	Desvio Padrão
σ_{s1}	Normal	kN/m ²	544.500	27.225
σ_{s2}	Normal	kN/m ²	238.600	11.930
e	Determinístico	m	0,1176	-

Tabela 6-10 - Parâmetros dos momentos para o pilar de 15 cm x 60 cm – Domínio 3

χ	VA (Valores em kN·m)			
	M_g (Normal)		M_q (Gumbel)	
	Média	Desvio Padrão	Média	Desvio Padrão
0	22,875	2,288	0,000	0,000
0,1	20,588	2,059	2,035	0,407
0,2	18,300	1,830	4,070	0,814
0,3	16,013	1,601	6,104	1,221
0,4	13,725	1,373	8,139	1,628
0,5	11,438	1,144	10,174	2,035
0,6	9,150	0,915	12,209	2,442
0,7	6,863	0,686	14,244	2,849
0,8	4,575	0,458	16,278	3,256
0,9	2,288	0,229	18,313	3,663
1,0	0,000	0,000	20,348	4,070

Para o caso do domínio 4, foram considerados os parâmetros das tabelas 6-11 e 6-12.

Tabela 6-11 – Tensões e excentricidade para o pilar 15 cm x 60 cm – Domínio 4

VA	Distribuição	Unidade	Média	Desvio Padrão
σ_{s1}	Normal	kN/m ²	210.000	10.500
σ_{s2}	Normal	kN/m ²	262.500	13.125
e	Determinístico	m	0,0522	-

Tabela 6-12 - Parâmetros dos momentos para o pilar de 15 cm x 60 cm – Domínio 4

χ	VA (Valores em kN·m)			
	M_g (Normal)		M_q (Gumbel)	
	Média	Desvio Padrão	Média	Desvio Padrão
0	23,956	2,396	0,000	0,000
0,1	21,561	2,156	2,131	0,426
0,2	19,165	1,917	4,262	0,852
0,3	16,769	1,677	6,393	1,279
0,4	14,374	1,437	8,524	1,705
0,5	11,978	1,198	10,655	2,131
0,6	9,583	0,958	12,786	2,557
0,7	7,187	0,719	14,917	2,983
0,8	4,791	0,479	17,048	3,410
0,9	2,396	0,240	19,179	3,836
1,0	0,000	0,000	21,310	4,262

c) Pilar 20 x 60

Para este pilar, não há coeficiente γ_n .

Para o caso do domínio 3, foram considerados os parâmetros das tabelas 6-13 e 6-14.

Tabela 6-13 – Tensões e excentricidade para o pilar 20 cm x 60 cm – Domínio 3

VA	Distribuição	Unidade	Média	Desvio Padrão
σ_{s1}	Normal	kN/m ²	544.500	27.225
σ_{s2}	Normal	kN/m ²	393.800	19.690
e	Determinístico	m	0,1189	-

Tabela 6-14 - Parâmetros dos momentos para o pilar de 20 cm x 60 cm – Domínio 3

χ	VA (Valores em kN·m)			
	M_g (Normal)		M_q (Gumbel)	
	Média	Desvio Padrão	Média	Desvio Padrão
0	53,730	5,373	0,000	0,000
0,1	48,357	4,836	4,779	0,956
0,2	42,984	4,298	9,559	1,912
0,3	37,611	3,761	14,338	2,868
0,4	32,238	3,224	19,118	3,824
0,5	26,865	2,687	23,897	4,779
0,6	21,492	2,149	28,676	5,735
0,7	16,119	1,612	33,456	6,691
0,8	10,746	1,075	38,235	7,647
0,9	5,373	0,537	43,015	8,603
1,0	0,000	0,000	47,794	9,559

Para o caso do domínio 4, foram considerados os parâmetros das tabelas 6-15 e 6-16.

Tabela 6-15 – Tensões e excentricidade para o pilar 20 cm x 60 cm – Domínio 4

VA	Distribuição	Unidade	Média	Desvio Padrão
σ_{s1}	Normal	kN/m ²	210.000	10.500
σ_{s2}	Normal	kN/m ²	262.500	13.125
e	Determinístico	m	0,0663	-

Tabela 6-16 - Parâmetros dos momentos para o pilar de 20 cm x 60 cm – Domínio 4

χ	VA (Valores em kN·m)			
	M_g (Normal)		M_q (Gumbel)	
	Média	Desvio Padrão	Média	Desvio Padrão
0	51,953	5,195	0,000	0,000
0,1	46,757	4,676	4,621	0,924
0,2	41,562	4,156	9,243	1,849
0,3	36,367	3,637	13,864	2,773
0,4	31,172	3,117	18,485	3,697
0,5	25,976	2,598	23,106	4,621
0,6	20,781	2,078	27,728	5,546
0,7	15,586	1,559	32,349	6,470
0,8	10,391	1,039	36,970	7,394
0,9	5,195	0,520	41,592	8,318
1,0	0,000	0,000	46,213	9,243

6.4.3. Resultados

As tabelas a seguir (6-17 a 6-22) apresentam os resultados obtidos nas análises.

Tabela 6-17 - Resultados do Pilar 12 x 60 – Domínio 3

χ	Média (kN·m)	Desvio Padrão (kN·m)	p (G < 0)	β
0,0	13,26	4,22	6,855E-04	3,14
0,1	13,37	4,20	6,090E-04	3,18
0,2	13,47	4,19	5,343E-04	3,21
0,3	13,57	4,19	4,835E-04	3,24
0,4	13,67	4,20	4,637E-04	3,26
0,5	13,77	4,21	4,692E-04	3,27
0,6	13,87	4,24	5,070E-04	3,28
0,7	13,98	4,27	5,905E-04	3,27
0,8	14,08	4,31	6,385E-04	3,27
0,9	14,18	4,35	7,612E-04	3,26
1,0	14,28	4,41	9,180E-04	3,24

Tabela 6-18 - Resultados do Pilar 15 x 60 – Domínio 3

χ	Média (kN·m)	Desvio Padrão (kN·m)	p (G < 0)	β
0,0	17,67	5,16	2,925E-04	3,42
0,1	17,82	5,12	2,135E-04	3,48
0,2	17,96	5,10	1,892E-04	3,52
0,3	18,10	5,09	1,657E-04	3,56
0,4	18,26	5,09	1,640E-04	3,58
0,5	18,40	5,11	1,953E-04	3,60
0,6	18,54	5,15	2,295E-04	3,60
0,7	18,68	5,20	3,355E-04	3,59
0,8	18,82	5,27	4,673E-04	3,57
0,9	18,96	5,34	6,500E-04	3,55
1,0	19,09	5,43	9,045E-04	3,52

Tabela 6-19 - Resultados do Pilar 20 x 60 – Domínio 3

χ	Média (kN·m)	Desvio Padrão (kN·m)	p (G < 0)	β
0,0	25,20	7,04	3,190E-04	3,58
0,1	25,48	6,94	2,153E-04	3,67
0,2	25,77	6,88	1,590E-04	3,75
0,3	26,04	6,85	1,357E-04	3,80
0,4	26,30	6,86	1,978E-04	3,83
0,5	26,56	6,93	2,880E-04	3,83
0,6	26,81	7,02	4,635E-04	3,82
0,7	27,05	7,16	7,605E-03	3,78
0,8	27,29	7,33	1,207E-03	3,72
0,9	27,52	7,52	1,784E-03	3,66
1,0	27,74	7,75	2,561E-03	3,58

Tabela 6-20 - Resultados do Pilar 12 x 60 – Domínio 4

χ	Média (kN·m)	Desvio Padrão (kN·m)	p (G < 0)	β
0,0	6,06	2,90	1,780E-02	2,09
0,1	6,06	2,88	1,969E-02	2,10
0,2	6,07	2,87	1,682E-02	2,12
0,3	6,07	2,85	1,628E-02	2,13
0,4	6,07	2,84	1,608E-01	2,14
0,5	6,06	2,83	1,575E-02	2,15
0,6	6,05	2,81	1,551E-02	2,15
0,7	6,04	2,80	1,531E-02	2,16
0,8	6,03	2,79	1,532E-02	2,16
0,9	6,01	2,78	1,531E-02	2,16
1,0	6,00	2,77	1,525E-02	2,17

Tabela 6-21 - Resultados do Pilar 15 x 60 – Domínio 4

χ	Média (kN·m)	Desvio Padrão (kN·m)	p (G < 0)	β
0,0	12,01	3,94	1,622E-03	3,05
0,1	12,04	3,90	1,392E-03	3,09
0,2	12,08	3,87	1,195E-03	3,12
0,3	12,10	3,84	1,101E-03	3,15
0,4	12,12	3,82	1,069E-03	3,18
0,5	12,13	3,79	1,097E-03	3,20
0,6	12,13	3,77	1,186E-03	3,22
0,7	12,12	3,76	1,347E-03	3,23
0,8	12,11	3,74	1,564E-03	3,24
0,9	12,09	3,73	1,855E-03	3,24
1,0	12,06	3,73	2,260E-03	3,24

Tabela 6-22 - Resultados do Pilar 20 x 60 – Domínio 4

χ	Média (kN·m)	Desvio Padrão (kN·m)	p (G < 0)	β
0,0	21,37	6,44	2,324E-03	3,32
0,1	21,55	6,33	1,790E-03	3,41
0,2	21,70	6,24	1,468E-03	3,48
0,3	21,84	6,16	1,311E-03	3,54
0,4	21,95	6,12	1,353E-03	3,59
0,5	22,03	6,09	1,532E-03	3,62
0,6	22,10	6,09	1,942E-03	3,63
0,7	22,14	6,10	2,437E-03	3,63
0,8	22,16	6,14	3,166E-03	3,61
0,9	22,15	6,21	4,183E-03	3,57
1,0	22,13	6,29	5,251E-03	3,52

As figuras 6-4 e 6-5 apresentam os índices de confiabilidade para as diferentes seções no domínio 3 e no domínio 4, respectivamente.

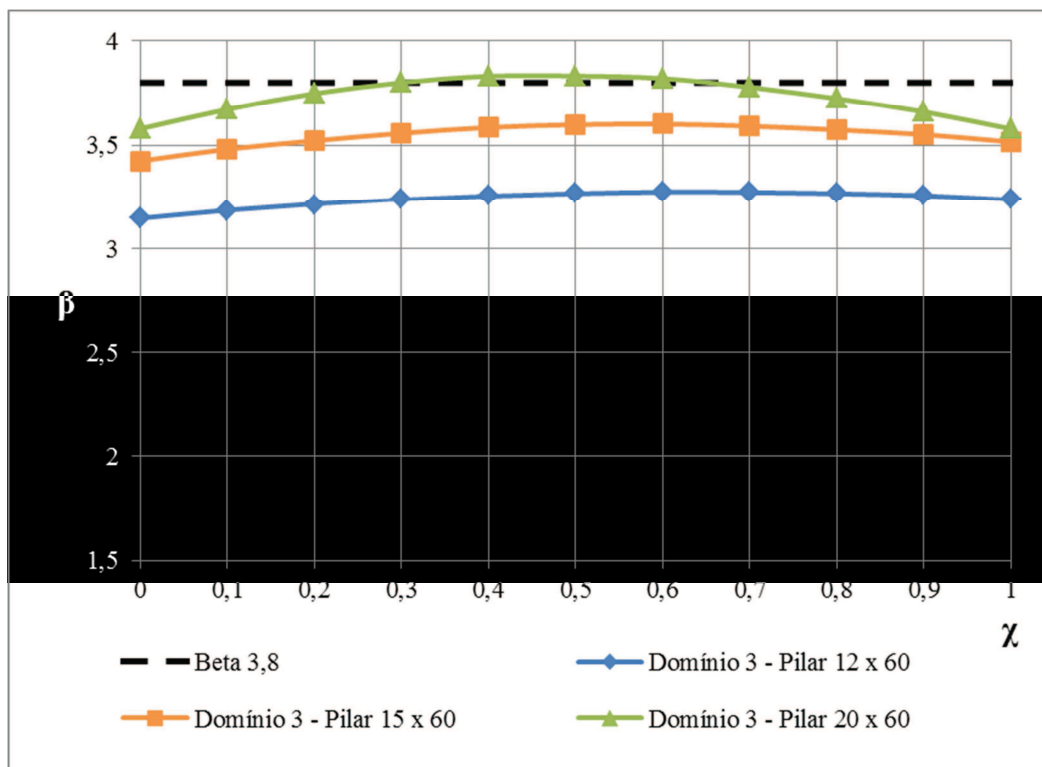


Figura 6-4 - Índice de confiabilidade dos pilares no domínio 3

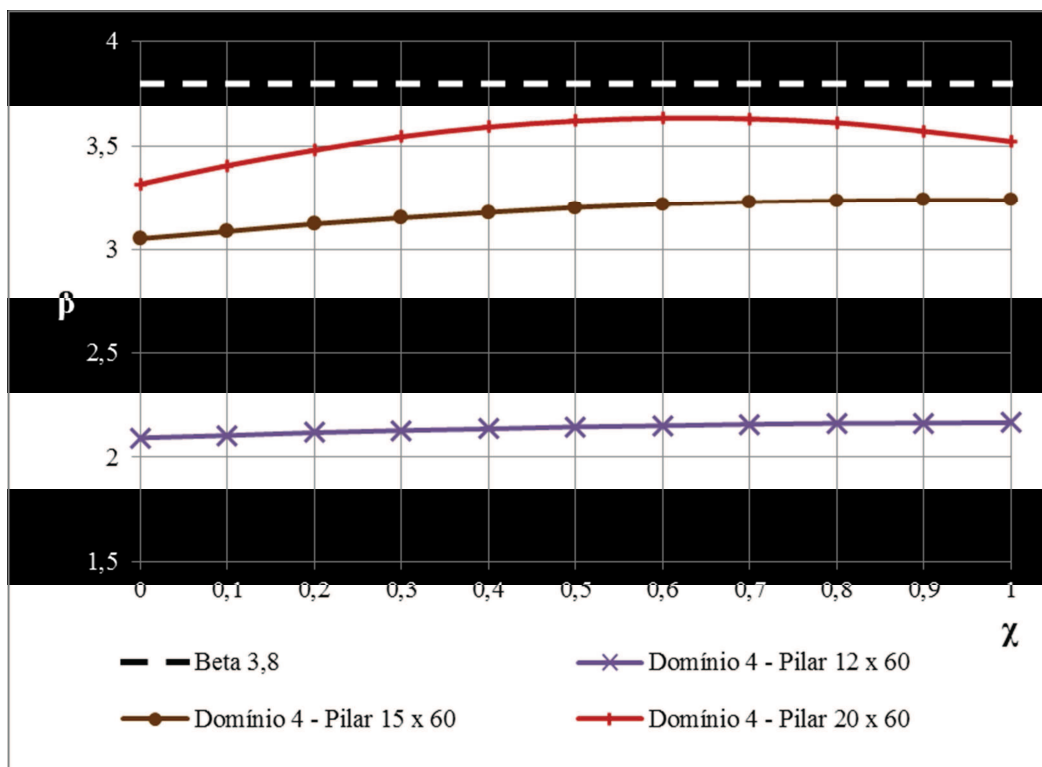


Figura 6-5 - Índice de confiabilidade dos pilares no domínio 4

Na figura 6-6, são apresentados os índices de confiabilidade para todas as seções.

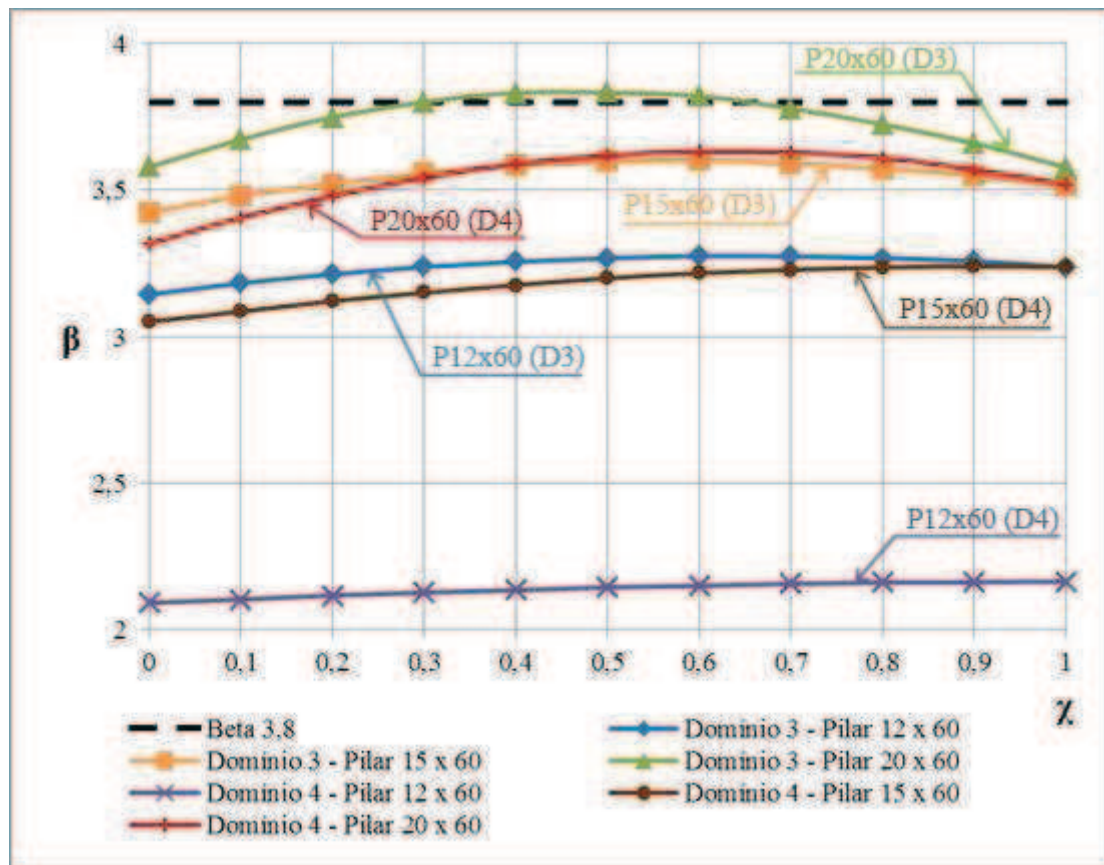


Figura 6-6 - Índice de confiabilidade dos pilares

Algumas conclusões podem ser tomadas.

- Todos os casos estudados ficaram com um índice de confiabilidade abaixo do valor alvo, com exceção do pilar de 20 cm x 60 cm no domínio três para certas condições de carregamento;
- O pilar de 12 cm x 60 cm ficou com um índice de confiabilidade muito abaixo dos demais pilares, mesmo utilizando um coeficiente $\gamma_n=1,35$;
- O coeficiente γ_n não é suficiente para levar o índice de confiabilidade dos pilares ao valor alvo estabelecido pelo Eurocode;
- Os pilares dimensionados para a ruptura no domínio 3 são mais seguros do que os mesmo pilares dimensionados para a ruptura no domínio 4, para a mesma área de armadura;
- Quanto maior o valor de h do pilar, maior é o seu índice de confiabilidade. Isto demonstra a influência da dimensão h e do desvio da armadura em relação às demais variáveis aleatórias.

Para complementar, a figura 6-7 apresenta a influência das variáveis na função de falha, para o caso do pilar de 12cm x 60cm nos domínios 3 e 4, quando $\chi = 0,5$. Esta influência é obtida pelos fatores de importância, que representam o quadrado dos cossenos diretores da superfície de falha no ponto de falha, fornecidos pelo método FORM. A soma de todos os fatores de influência é igual a 1. Mais uma vez, percebe-se a influência da dimensão h e dos desvios nas armaduras.

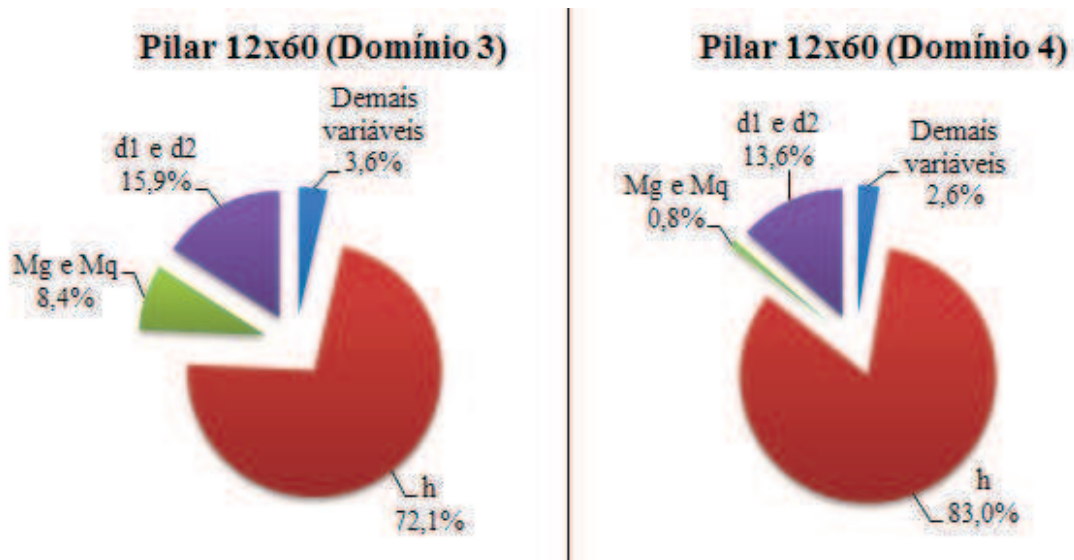


Figura 6-7 – Fator de importância das variáveis na função de falha

7. CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Na análise das seções submetidas a flexão simples, percebeu-se que nenhuma das lajes estudadas obteve um índice de confiabilidade maior do que o valor previsto no Eurocode ($\beta_a = 3,8$). Quando se utilizou o coeficiente γ_n sugerido por BUENO (2011), a confiabilidade das lajes com altura menor de 19 cm melhorou de forma significativa, porém não foi o suficiente para atingir o valor desejado.

As vigas estudadas (20 cm x 50 cm e 20 cm x 70 cm) ficaram acima do valor alvo para quase todas as condições de carregamento. Somente para situações em que a carga variável representava mais do que cerca 75% do esforço total é que o índice de confiabilidade ficou abaixo do valor esperado.

Os pilares estudados, assim como as lajes, não atingiram o valor alvo estabelecido pelo Eurocode, com exceção do pilar de 20 cm x 60 cm, para condições particulares de carregamento. Além disso, verificou-se que os pilares são mais seguros no domínio 3 do que no domínio 4, para a mesma armadura.

Em geral, os resultados obtidos para as vigas e lajes foram piores para os casos em que a carga variável representava a maior parte do carregamento. Isso indica que é necessário utilizar um coeficiente de majoração maior para as cargas variáveis, visto que elas apresentam uma incerteza maior do que as cargas permanentes. Nos resultados obtidos para os pilares, não houve grande variação do índice de confiabilidade em função do tipo de carregamento (permanente ou acidental).

As incertezas nas dimensões da seção e na posição da armadura demonstraram-se muito importantes na verificação. Isto indica que mais atenção deve ser dada a essas incertezas. Uma sugestão para melhorar o índice de confiabilidade é ampliar o intervalo de aplicação do coeficiente γ_n para espessuras maiores do que 19 cm. Outra medida que melhoraria a segurança dos elementos estruturais seria aumentar as dimensões mínimas de lajes e de pilares.

Uma sugestão, para trabalhos posteriores, relacionada a pilares seria estudar a influência de esforços devidos à ação do vento. Também poderia estudar o índice de confiabilidade de seções percorrendo todos os domínios de ruptura.

8. BIBLIOGRAFIA

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2003. **NBR 8681: Ações e segurança nas estruturas – Procedimento**. Rio de Janeiro.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2007. **NBR 6118: Projeto de Estruturas de concreto – Procedimento**. Rio de Janeiro.

BENJAMIN, J. R.; CORNELL, C. A., 1970. **Probability, Statistics, and Decision for Civil Engineers**. 1 ed., Nova York: McGraw – Hill.

BUENO, S. B., 2011. “Texto-base para revisão da NBR 6118”. In: **14º Encontro Nacional de Engenharia e Consultoria Estrutural (ENECE)**. São Paulo, Outubro, 2011.

BUSSAB, W. O.; MORETTIN, P. A., 2004. **Estatística Básica**. 5 ed., São Paulo: Saraiva.

CARVALHO, R. C.; FIGUEIREDO FILHO, J. R., 2009. **Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado: segundo a NBR 6118: 2003**. 3 ed., São Carlos: EdUFSCar.

CHOI, S. K; GRANDHI, R. V.; CANFIELD, R. A., 2007. **Reliability-based Structural Design**. 1 ed., Londres: Springer-Verlag.

EBOLI, C. R.; VAZ, L. E. Optimization of Plane Trusses with Constraints in the Reliability Index Beta. In: **6th World Congresses of Structural and Multidisciplinary Optimization**. Rio de Janeiro, Junho, 2005.

FABER, M. H., 2001. **Basic Statistics and Probability – an Introduction**. Lecture Notes on Risk and Reliability in Civil Engineering. Swiss Federal Institute of Technology.

FRANCO, R. M. **Avaliação da segurança em peças de concreto armado com base na teoria da confiabilidade**. Rio de Janeiro: POLI/UFRJ, 2010. Projeto final de graduação.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION (CEN), 2001. **EN 1990 – EUROCODE: Basis of Structural Design**. Bruxelas.

HART, G. C., 1982. **Uncertainty Analysis, Loads, and Safety in Structural Engineering**. 1 ed., New Jersey, USA: Prentice - Hall.

HOLICKÝ, M.; SYKORA, M., 2011. “Conventional probabilistic models for calibration of codes”. **Applications of Statistics and Probability in Civil Engineering (ICASP11)**, 969-76, Londres.

JOINT COMMITTEE ON STRUCTURAL SAFETY (JCSS), 2006. **The Probabilistic Model Code**. ETHZ, Zurique. Disponível em: <<http://www.jcss.byg.dtu.dk>>. Acesso em: 9 jan. 2012, 22:18:00.

LIMA, E. C. P.; SAGRILO, L. V. S., 2002. **Confiabilidade Estrutural: Métodos Analíticos (FORM – SORM), Método Monte Carlo**. Rio de Janeiro: Fundação COPPETEC COPPE/UFRJ, Programa de Engenharia Civil (PEC).

MELCHERS, R. E., 1999. **Structural Reliability Analysis and Prediction**. 2 ed., Melbourne, John Willey & Sons.

PETSCHACHER, M. **VaP 1.6 for MS-WINDOWS**. Atualizado por SIMOV, G.; TOULEV, S. Zurique: Institute of Structural Engineering IBK (ETH).

SANTOS, S. H. C.; EBOLI, C. R. Avaliação da confiabilidade estrutural com base nas normas NBR-6118 e NBR-8681. In: **VI Simpósio EPUSP sobre Estruturas de Concreto**. São Paulo, Abril, 2006.

SANTOS, S. H. C., 2009, **Apostila de concreto armado I**. Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), Escola Politécnica, Rio de Janeiro.

SANTOS, S. H. C., 2010, **Apostila de concreto armado III**. Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), Escola Politécnica, Rio de Janeiro.

STUCCHI, F. R.; SANTOS, S. H. C., 2011. “Evaluation of the Safety Criteria of Brazilian Standard NBR 6118 Based on Reliability Analyses”. In: **11th International Conference on Applications of Statistics and Probability in Civil Engineering**, 2011, Zürich. 11th International Conference on Applications of Statistics and Probability in Civil Engineering. Londres: CRC Press, 2011. v. 1. p. 833-834.

STUCCHI, F. R.; SANTOS, S. H. C.; FRANCO, R. M. 2011. “Evaluation of the Safety Criteria of Brazilian Standard NBR 6118 for Slender Members Based on Reliability Analyses”. In: **Applications of Statistics and Probability in Civil Engineering**. Londres: CRC Press, 2011. v. 1. p. 2761-2768

9. ANEXOS

A. Tabela de distribuição normal padrão

β	$\Phi(-\beta)$									
	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	5,00E-1	4,96E-1	4,92E-1	4,88E-1	4,84E-1	4,80E-1	4,76E-1	4,72E-1	4,68E-1	4,64E-1
0,1	4,60E-1	4,56E-1	4,52E-1	4,48E-1	4,44E-1	4,40E-1	4,36E-1	4,33E-1	4,29E-1	4,25E-1
0,2	4,21E-1	4,17E-1	4,13E-1	4,09E-1	4,05E-1	4,01E-1	3,97E-1	3,94E-1	3,90E-1	3,86E-1
0,3	3,82E-1	3,78E-1	3,74E-1	3,71E-1	3,67E-1	3,63E-1	3,59E-1	3,56E-1	3,52E-1	3,48E-1
0,4	3,45E-1	3,41E-1	3,37E-1	3,34E-1	3,30E-1	3,26E-1	3,23E-1	3,19E-1	3,16E-1	3,12E-1
0,5	3,09E-1	3,05E-1	3,02E-1	2,98E-1	2,95E-1	2,91E-1	2,88E-1	2,84E-1	2,81E-1	2,78E-1
0,6	2,74E-1	2,71E-1	2,68E-1	2,64E-1	2,61E-1	2,58E-1	2,55E-1	2,51E-1	2,48E-1	2,45E-1
0,7	2,42E-1	2,39E-1	2,36E-1	2,33E-1	2,30E-1	2,27E-1	2,24E-1	2,21E-1	2,18E-1	2,15E-1
0,8	2,12E-1	2,09E-1	2,06E-1	2,03E-1	2,00E-1	1,98E-1	1,95E-1	1,92E-1	1,89E-1	1,87E-1
0,9	1,84E-1	1,81E-1	1,79E-1	1,76E-1	1,74E-1	1,71E-1	1,69E-1	1,66E-1	1,64E-1	1,61E-1
1,0	1,59E-1	1,56E-1	1,54E-1	1,52E-1	1,49E-1	1,47E-1	1,45E-1	1,42E-1	1,40E-1	1,38E-1
1,1	1,36E-1	1,33E-1	1,31E-1	1,29E-1	1,27E-1	1,25E-1	1,23E-1	1,21E-1	1,19E-1	1,17E-1
1,2	1,15E-1	1,13E-1	1,11E-1	1,09E-1	1,07E-1	1,06E-1	1,04E-1	1,02E-1	1,00E-1	9,85E-2
1,3	9,68E-2	9,51E-2	9,34E-2	9,18E-2	9,01E-2	8,85E-2	8,69E-2	8,53E-2	8,38E-2	8,23E-2
1,4	8,08E-2	7,93E-2	7,78E-2	7,64E-2	7,49E-2	7,35E-2	7,21E-2	7,08E-2	6,94E-2	6,81E-2
1,5	6,68E-2	6,55E-2	6,43E-2	6,30E-2	6,18E-2	6,06E-2	5,94E-2	5,82E-2	5,71E-2	5,59E-2
1,6	5,48E-2	5,37E-2	5,26E-2	5,16E-2	5,05E-2	4,95E-2	4,85E-2	4,75E-2	4,65E-2	4,55E-2
1,7	4,46E-2	4,36E-2	4,27E-2	4,18E-2	4,09E-2	4,01E-2	3,92E-2	3,84E-2	3,75E-2	3,67E-2
1,8	3,59E-2	3,51E-2	3,44E-2	3,36E-2	3,29E-2	3,22E-2	3,14E-2	3,07E-2	3,01E-2	2,94E-2
1,9	2,87E-2	2,81E-2	2,74E-2	2,68E-2	2,62E-2	2,56E-2	2,50E-2	2,44E-2	2,39E-2	2,33E-2
2,0	2,28E-2	2,22E-2	2,17E-2	2,12E-2	2,07E-2	2,02E-2	1,97E-2	1,92E-2	1,88E-2	1,83E-2
2,1	1,79E-2	1,74E-2	1,70E-2	1,66E-2	1,62E-2	1,58E-2	1,54E-2	1,50E-2	1,46E-2	1,43E-2
2,2	1,39E-2	1,36E-2	1,32E-2	1,29E-2	1,25E-2	1,22E-2	1,19E-2	1,16E-2	1,13E-2	1,10E-2
2,3	1,07E-2	1,04E-2	1,02E-2	9,90E-3	9,64E-3	9,39E-3	9,14E-3	8,89E-3	8,66E-3	8,42E-3
2,4	8,20E-3	7,98E-3	7,76E-3	7,55E-3	7,34E-3	7,14E-3	6,95E-3	6,76E-3	6,57E-3	6,39E-3
2,5	6,21E-3	6,04E-3	5,87E-3	5,70E-3	5,54E-3	5,39E-3	5,23E-3	5,08E-3	4,94E-3	4,80E-3

β	$\Phi(-\beta)$									
	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
2,6	4,66E-3	4,53E-3	4,40E-3	4,27E-3	4,15E-3	4,02E-3	3,91E-3	3,79E-3	3,68E-3	3,57E-3
2,7	3,47E-3	3,36E-3	3,26E-3	3,17E-3	3,07E-3	2,98E-3	2,89E-3	2,80E-3	2,72E-3	2,64E-3
2,8	2,56E-3	2,48E-3	2,40E-3	2,33E-3	2,26E-3	2,19E-3	2,12E-3	2,05E-3	1,99E-3	1,93E-3
2,9	1,87E-3	1,81E-3	1,75E-3	1,69E-3	1,64E-3	1,59E-3	1,54E-3	1,49E-3	1,44E-3	1,39E-3
3,0	1,35E-3	1,31E-3	1,26E-3	1,22E-3	1,18E-3	1,14E-3	1,11E-3	1,07E-3	1,04E-3	1,00E-3
3,1	9,68E-4	9,35E-4	9,04E-4	8,74E-4	8,45E-4	8,16E-4	7,89E-4	7,62E-4	7,36E-4	7,11E-4
3,2	6,87E-4	6,64E-4	6,41E-4	6,19E-4	5,98E-4	5,77E-4	5,57E-4	5,38E-4	5,19E-4	5,01E-4
3,3	4,83E-4	4,66E-4	4,50E-4	4,34E-4	4,19E-4	4,04E-4	3,90E-4	3,76E-4	3,62E-4	3,49E-4
3,4	3,37E-4	3,25E-4	3,13E-4	3,02E-4	2,91E-4	2,80E-4	2,70E-4	2,60E-4	2,51E-4	2,42E-4
3,5	2,33E-4	2,24E-4	2,16E-4	2,08E-4	2,00E-4	1,93E-4	1,85E-4	1,78E-4	1,72E-4	1,65E-4
3,6	1,59E-4	1,53E-4	1,47E-4	1,42E-4	1,36E-4	1,31E-4	1,26E-4	1,21E-4	1,17E-4	1,12E-4
3,7	1,08E-4	1,04E-4	9,96E-5	9,57E-5	9,20E-5	8,84E-5	8,50E-5	8,16E-5	7,84E-5	7,53E-5
3,8	7,23E-5	6,95E-5	6,67E-5	6,41E-5	6,15E-5	5,91E-5	5,67E-5	5,44E-5	5,22E-5	5,01E-5
3,9	4,81E-5	4,61E-5	4,43E-5	4,25E-5	4,07E-5	3,91E-5	3,75E-5	3,59E-5	3,45E-5	3,30E-5
4,0	3,17E-5	3,04E-5	2,91E-5	2,79E-5	2,67E-5	2,56E-5	2,45E-5	2,35E-5	2,25E-5	2,16E-5
4,1	2,07E-5	1,98E-5	1,89E-5	1,81E-5	1,74E-5	1,66E-5	1,59E-5	1,52E-5	1,46E-5	1,39E-5
4,2	1,33E-5	1,28E-5	1,22E-5	1,17E-5	1,12E-5	1,07E-5	1,02E-5	9,77E-6	9,34E-6	8,93E-6
4,3	8,54E-6	8,16E-6	7,80E-6	7,46E-6	7,12E-6	6,81E-6	6,50E-6	6,21E-6	5,93E-6	5,67E-6
4,4	5,41E-6	5,17E-6	4,94E-6	4,71E-6	4,50E-6	4,29E-6	4,10E-6	3,91E-6	3,73E-6	3,56E-6
4,5	3,40E-6	3,24E-6	3,09E-6	2,95E-6	2,81E-6	2,68E-6	2,56E-6	2,44E-6	2,32E-6	2,22E-6
4,6	2,11E-6	2,01E-6	1,92E-6	1,83E-6	1,74E-6	1,66E-6	1,58E-6	1,51E-6	1,43E-6	1,37E-6
4,7	1,30E-6	1,24E-6	1,18E-6	1,12E-6	1,07E-6	1,02E-6	9,68E-7	9,21E-7	8,76E-7	8,34E-7
4,8	7,93E-7	7,55E-7	7,18E-7	6,83E-7	6,49E-7	6,17E-7	5,87E-7	5,58E-7	5,30E-7	5,04E-7
4,9	4,79E-7	4,55E-7	4,33E-7	4,11E-7	3,91E-7	3,71E-7	3,52E-7	3,35E-7	3,18E-7	3,02E-7
5,0	2,87E-7	2,72E-7	2,58E-7	2,45E-7	2,33E-7	2,21E-7	2,10E-7	1,99E-7	1,89E-7	1,79E-7

B. Exemplo do Método de Monte Carlo

A tabela a seguir apresenta os resultados do exemplo do método de Monte Carlo apresentado no item (3.7.3).

i	r1	r2	u1	u2	R	S	G	I[G(X)]
1	0,7919	0,3010	-0,2151	0,3367	14,6773	10,6733	4,0039	0
2	0,9501	0,3337	-0,1607	0,7882	14,7589	11,5764	3,1826	0
3	0,0176	0,1446	1,7483	-0,0205	17,6225	9,9589	7,6636	0
4	0,6543	0,8213	0,3988	-0,5049	15,5982	8,9901	6,6081	0
5	0,1816	0,8955	1,4630	-0,4572	17,1945	9,0856	8,1088	0
6	0,4391	0,2055	0,3538	-1,0794	15,5307	7,8412	7,6894	0
7	0,1720	0,8207	0,8059	0,2164	16,2089	10,4327	5,7761	0
8	0,2719	0,9110	1,3680	-0,2917	17,0520	9,4167	7,6353	0
9	0,8792	0,4080	-0,4250	-1,1930	14,3625	7,6139	6,7486	0
10	0,5600	0,3245	-0,4860	-1,4945	14,2710	7,0110	7,2599	0
11	0,6173	0,2057	0,2700	-0,2226	15,4050	9,5549	5,8501	0
12	0,0678	0,5849	-1,9976	1,0356	12,0037	12,0711	-0,0675	1
13	0,2200	0,5205	-1,7259	-0,1727	12,4112	9,6546	2,7566	0
14	0,4302	0,5076	-1,2974	-0,3418	13,0539	9,3164	3,7375	0
15	0,7284	0,6919	-0,2841	-0,1827	14,5738	9,6346	4,9392	0
16	0,4760	0,4035	-1,0013	1,3472	13,4981	12,6945	0,8036	0
17	0,0845	0,0504	2,1126	1,8575	18,1689	13,7150	4,4539	0
18	0,9689	0,6438	-0,1556	0,5246	14,7666	11,0492	3,7174	0
19	0,3589	0,8515	0,8525	0,3405	16,2788	10,6811	5,5977	0
20	0,8139	0,2804	-0,1218	1,1499	14,8173	12,2998	2,5174	0
21	0,4965	0,8042	0,3956	-0,5231	15,5934	8,9538	6,6396	0
22	0,7327	0,7982	0,2354	0,0615	15,3531	10,1229	5,2302	0
23	0,9666	0,6959	-0,0869	0,7277	14,8697	11,4555	3,4142	0
24	0,6685	0,1512	0,5220	-1,9252	15,7831	6,1496	9,6334	0
25	0,4590	0,8356	0,6395	-0,3835	15,9592	9,2330	6,7263	0
26	0,5348	0,6077	-0,8722	0,6931	13,6917	11,3862	2,3056	0
27	0,0836	0,4889	-2,2222	0,2078	11,6667	10,4155	1,2512	0
28	0,9607	0,8717	0,1961	0,1742	15,2941	10,3484	4,9457	0
29	0,5763	0,9420	0,9809	0,3433	16,4713	10,6866	5,7847	0
30	0,2754	0,1806	0,6779	-0,8100	16,0168	8,3800	7,6368	0
31	0,4928	0,1283	0,8236	0,9038	16,2354	11,8077	4,4277	0
32	0,2408	0,5618	-1,5616	-0,9945	12,6577	8,0111	4,6466	0
33	0,8691	0,7041	-0,1508	0,4892	14,7739	10,9784	3,7955	0
34	0,6909	0,4974	-0,8598	0,7521	13,7103	11,5042	2,2061	0
35	0,8743	0,4155	-0,4470	-1,2525	14,3295	7,4949	6,8346	0
36	0,0357	0,1617	1,3596	-1,2135	17,0395	7,5730	9,4664	0
37	0,4065	0,3419	-0,7326	-0,1599	13,9011	9,6801	4,2210	0
38	0,9658	0,8447	0,1479	0,3475	15,2219	10,6950	4,5269	0

39	0,6156	0,7786	0,1762	0,3165	15,2643	10,6331	4,6312	0
40	0,7085	0,5257	-0,8195	0,4796	13,7708	10,9591	2,8116	0
41	0,6547	0,5715	-0,8289	0,5034	13,7566	11,0068	2,7498	0
42	0,9835	0,9439	0,1710	0,1618	15,2565	10,3236	4,9329	0
43	0,6076	0,0461	0,9565	2,3885	16,4348	14,7771	1,6577	0
44	0,3813	0,0937	1,1548	1,2255	16,7322	12,4510	4,2812	0
45	0,8321	0,9248	0,5398	-0,3832	15,8096	9,2336	6,5761	0
46	0,8881	0,0130	0,4856	-2,9352	15,7284	4,1297	11,5987	0
47	0,2034	0,9821	1,7733	0,0278	17,6600	10,0556	7,6045	0
48	0,1521	0,6476	-1,1641	0,4792	13,2539	10,9583	2,2956	0
49	0,6349	0,0676	0,8685	1,5727	16,3027	13,1455	3,1573	0
50	0,2269	0,3327	-0,8555	0,9129	13,7168	11,8258	1,8910	0
51	0,7202	0,6971	-0,2643	-0,0762	14,6035	9,8475	4,7560	0
52	0,6330	0,2041	0,2718	-0,2429	15,4076	9,5142	5,8935	0
53	0,2840	0,3071	-0,5568	-1,4398	14,1648	7,1205	7,0443	0
54	0,6215	0,9407	0,9084	0,2933	16,3626	10,5865	5,7761	0
55	0,4132	0,0450	1,2769	-0,4188	16,9153	9,1624	7,7529	0
56	0,7807	0,6096	-0,5433	-0,9584	14,1851	8,0833	6,1018	0
57	0,5082	0,3267	-0,5396	-1,4497	14,1906	7,1007	7,0900	0
58	0,3159	0,3663	-1,0131	1,4125	13,4803	12,8249	0,6554	0
59	0,5268	0,9001	0,9164	0,3969	16,3746	10,7938	5,5808	0
60	0,8894	0,6264	-0,3395	-0,5156	14,4908	8,9689	5,5219	0
61	0,9278	0,8293	0,1851	0,2424	15,2777	10,4849	4,7928	0
62	0,5295	0,8790	0,8170	0,2077	16,2255	10,4153	5,8102	0
63	0,7695	0,5832	-0,6272	-0,7241	14,0592	8,5518	5,5074	0
64	0,8002	0,9885	0,6660	-0,0764	15,9990	9,8471	6,1519	0
65	0,0481	0,2298	0,3121	-0,6528	15,4682	8,6944	6,7738	0
66	0,4740	0,7933	0,3286	-0,3224	15,4929	9,3551	6,1377	0
67	0,7786	0,2969	-0,2057	0,4285	14,6915	10,8570	3,8345	0
68	0,6507	0,2830	-0,1908	0,5776	14,7138	11,1552	3,5586	0
69	0,6654	0,6044	-0,7153	-0,2169	13,9270	9,5662	4,3608	0
70	0,2782	0,2119	0,3796	-1,2813	15,5694	7,4374	8,1320	0
71	0,2400	0,3878	-1,2867	-0,3148	13,0699	9,3704	3,6995	0
72	0,5566	0,0624	1,0004	2,3557	16,5006	14,7115	1,7891	0
73	0,2418	0,9065	1,4024	-0,3623	17,1036	9,2753	7,8282	0
74	0,8884	0,1515	0,2823	-0,3915	15,4234	9,2170	6,2065	0
75	0,0207	0,7266	-0,4081	-0,6698	14,3878	8,6604	5,7273	0
76	0,4068	0,6286	-0,9268	0,8636	13,6097	11,7272	1,8825	0
77	0,6889	0,3425	-0,4740	-1,4444	14,2889	7,1111	7,1778	0
78	0,8198	0,2672	-0,0682	1,4778	14,8978	12,9556	1,9421	0
79	0,2713	0,9327	1,4731	-0,3679	17,2096	9,2642	7,9454	0
80	0,1707	0,3259	-0,8627	0,9741	13,7059	11,9482	1,7577	0
81	0,0947	0,6838	-0,8775	0,6261	13,6838	11,2521	2,4316	0
82	0,9076	0,9556	0,4234	-0,2670	15,6350	9,4660	6,1691	0
83	0,5442	0,7111	-0,2666	-0,0862	14,6000	9,8276	4,7724	0

84	0,9001	0,0559	0,4309	-2,1789	15,6463	5,6422	10,0041	0
85	0,0041	0,5830	-2,8727	0,7239	10,6909	11,4478	-0,7569	1
86	0,4726	0,7555	0,0423	0,7225	15,0635	11,4450	3,6184	0
87	0,0135	0,0579	2,7431	-0,1039	19,1146	9,7921	9,3225	0
88	0,3365	0,3125	-0,5650	-1,3999	14,1526	7,2002	6,9524	0
89	0,5452	0,3106	-0,4092	-1,2873	14,3861	7,4254	6,9607	0
90	0,2253	0,2485	0,0159	1,6603	15,0238	13,3207	1,7032	0
91	0,2831	0,3455	-0,8967	1,1618	13,6549	12,3235	1,3313	0
92	0,5795	0,6067	-0,8183	0,4161	13,7725	10,8322	2,9403	0
93	0,4736	0,3177	-0,5044	-1,5138	14,2433	6,9724	7,2709	0
94	0,6431	0,5738	-0,8405	0,5674	13,7393	11,1348	2,6045	0
95	0,5020	0,7223	-0,2031	0,2342	14,6953	10,4683	4,2270	0
96	0,9761	0,1347	0,1457	1,2206	15,2185	12,4413	2,7772	0
97	0,6675	0,2595	-0,0537	1,5499	14,9194	13,0997	1,8197	0
98	0,2372	0,3808	-1,2427	0,0641	13,1360	10,1282	3,0078	0
99	0,0447	0,3073	-0,8780	1,1066	13,6830	12,2133	1,4697	0
100	0,4614	0,2094	0,3138	-0,6903	15,4707	8,6194	6,8513	0
101	0,5178	0,6816	-0,4782	-0,8674	14,2827	8,2652	6,0175	0
102	0,3873	0,9515	1,3138	-0,1231	16,9707	9,7537	7,2170	0
103	0,5981	0,5533	-0,9576	1,0496	13,5636	12,0992	1,4644	0
104	0,5287	0,9626	1,0980	0,2256	16,6469	10,4512	6,1958	0
105	0,1246	0,7026	-0,5989	-0,6830	14,1016	8,6339	5,4677	0
106	0,4124	0,6999	-0,4121	-0,7193	14,3818	8,5614	5,8203	0
107	0,1270	0,8070	0,7125	-0,1528	16,0688	9,6944	6,3744	0
108	0,0427	0,0495	2,3903	-1,8919	18,5855	6,2161	12,3693	0
109	0,1543	0,8908	1,4959	-0,4808	17,2438	9,0385	8,2053	0
110	0,5222	0,3013	-0,3613	-0,9973	14,4580	8,0053	6,4527	0
111	0,7597	0,0432	0,7143	-0,5575	16,0714	8,8849	7,1865	0
112	0,1695	0,7396	-0,1229	0,5564	14,8156	11,1127	3,7029	0
113	0,9135	0,2451	0,0132	1,6713	15,0198	13,3426	1,6773	0
114	0,2118	0,3188	-0,7380	-0,1144	13,8931	9,7713	4,1218	0
115	0,8775	0,0673	0,4663	-2,2715	15,6994	5,4571	10,2423	0
116	0,3553	0,2812	-0,2803	-0,3016	14,5795	9,3967	5,1828	0
117	0,9067	0,1037	0,3519	-1,2724	15,5279	7,4553	8,0727	0
118	0,5653	0,3280	-0,5027	-1,4929	14,2459	7,0141	7,2318	0
119	0,5142	0,8566	0,7160	-0,1181	16,0739	9,7638	6,3101	0
120	0,7431	0,1907	0,2804	-0,3455	15,4206	9,3091	6,1115	0
121	0,3280	0,0259	1,4734	-2,6656	17,2101	4,6687	12,5414	0
122	0,3992	0,5026	-1,3550	-0,7190	12,9675	8,5620	4,4055	0
123	0,2753	0,8308	0,7813	0,1188	16,1719	10,2376	5,9343	0
124	0,7306	0,5549	-0,7456	-0,0303	13,8817	9,9395	3,9422	0
125	0,8623	0,4263	-0,4869	-1,3015	14,2696	7,3970	6,8727	0
126	0,0164	0,0369	2,7898	0,6363	19,1847	11,2725	7,9122	0
127	0,1421	0,8152	0,7867	0,1460	16,1800	10,2919	5,8880	0
128	0,8349	0,5708	-0,5423	-1,0218	14,1865	7,9565	6,2300	0

129	0,6061	0,3164	-0,4054	-1,2567	14,3920	7,4867	6,9053	0
130	0,6621	0,6539	-0,5155	-0,9173	14,2267	8,1653	6,0614	0
131	0,2973	0,3815	-1,1456	0,8470	13,2817	11,6939	1,5877	0
132	0,3920	0,8174	0,5628	-0,5861	15,8442	8,8278	7,0164	0
133	0,5824	0,7962	0,2976	-0,1989	15,4464	9,6022	5,8442	0
134	0,3218	0,7169	-0,3105	-0,3028	14,5342	9,3945	5,1398	0
135	0,7244	0,0980	0,6557	-1,2040	15,9835	7,5919	8,3916	0
136	0,7554	0,1470	0,4516	-1,8686	15,6775	6,2628	9,4146	0
137	0,9530	0,7704	0,0397	0,6999	15,0595	11,3998	3,6597	0
138	0,7799	0,3876	-0,5365	-1,3408	14,1952	7,3185	6,8768	0
139	0,3764	0,6445	-0,8601	0,5977	13,7099	11,1953	2,5146	0
140	0,7160	0,7272	-0,1169	0,5923	14,8246	11,1847	3,6399	0
141	0,5560	0,2427	0,0496	1,6018	15,0743	13,2037	1,8706	0
142	0,9698	0,0476	0,2365	0,2097	15,3547	10,4194	4,9352	0
143	0,7047	0,1311	0,5687	-1,8310	15,8531	6,3379	9,5151	0
144	0,1042	0,3877	-1,6188	-1,0107	12,5718	7,9785	4,5933	0
145	0,0024	0,3505	-2,0515	1,3729	11,9228	12,7458	-0,8230	1
146	0,4760	0,4947	-1,2178	0,2380	13,1732	10,4761	2,6972	0
147	0,9627	0,4142	-0,2368	0,1104	14,6449	10,2207	4,4241	0
148	0,9882	0,7983	0,0461	0,6433	15,0691	11,2866	3,7825	0
149	0,4582	0,8568	0,7771	0,0942	16,1657	10,1884	5,9773	0
150	0,4858	0,7048	-0,3364	-0,4320	14,4954	9,1360	5,3594	0
151	0,2265	0,6094	-1,3322	-0,4916	13,0017	9,0169	3,9848	0
152	0,7472	0,1399	0,4869	-1,9766	15,7304	6,0467	9,6837	0
153	0,3498	0,4278	-1,3027	-0,4234	13,0460	9,1531	3,8929	0
154	0,0476	0,7328	-0,2658	-0,0782	14,6013	9,8436	4,7577	0
155	0,8533	0,7161	-0,1191	0,5988	14,8213	11,1977	3,6237	0
156	0,6892	0,7698	0,1071	0,5657	15,1606	11,1314	4,0293	0
157	0,0350	0,8573	1,6169	-0,4118	17,4254	9,1764	8,2489	0
158	0,9025	0,7588	0,0250	0,7338	15,0375	11,4677	3,5699	0
159	0,1398	0,8662	1,3228	-0,2367	16,9842	9,5267	7,4575	0
160	0,6150	0,8786	0,7129	-0,1175	16,0694	9,7650	6,3043	0
161	0,2759	0,7880	0,3797	-0,5022	15,5695	8,9956	6,5739	0
162	0,9298	0,6617	-0,2009	0,2759	14,6986	10,5518	4,1469	0
163	0,2029	0,8921	1,3909	-0,3699	17,0863	9,2602	7,8261	0
164	0,8024	0,7239	-0,1084	0,6246	14,8374	11,2491	3,5883	0
165	0,9732	0,7103	-0,0576	0,7736	14,9137	11,5472	3,3664	0
166	0,7696	0,7778	0,1258	0,4987	15,1887	10,9974	4,1914	0
167	0,2322	0,5514	-1,6206	-0,7925	12,5691	8,4150	4,1541	0
168	0,6491	0,3301	-0,4484	-1,4114	14,3273	7,1772	7,1501	0
169	0,1835	0,0041	1,8408	1,7901	17,7612	13,5803	4,1809	0
170	0,2654	0,7253	-0,2513	-0,0066	14,6230	9,9868	4,6362	0
171	0,1122	0,7061	-0,5695	-0,7560	14,1458	8,4880	5,6578	0
172	0,1515	0,1254	1,3702	-1,3973	17,0554	7,2054	9,8499	0
173	0,8623	0,1308	0,3705	-1,3857	15,5558	7,2286	8,3272	0

174	0,0012	0,5943	-3,0495	0,9711	10,4257	11,9422	-1,5165	1
175	0,1538	0,6438	-1,1973	0,3049	13,2040	10,6098	2,5942	0
176	0,0457	0,8474	1,4273	-0,5164	17,1409	8,9672	8,1738	0
177	0,0110	0,5306	-2,9493	1,0691	10,5761	12,1382	-1,5621	1
178	0,3610	0,4685	-1,3997	-0,9949	12,9004	8,0102	4,8903	0
179	0,5881	0,7147	-0,2265	0,1207	14,6603	10,2414	4,4189	0
180	0,2723	0,6600	-0,8638	0,5977	13,7043	11,1954	2,5089	0
181	0,1653	0,8143	0,7455	-0,0181	16,1183	9,9639	6,1544	0
182	0,1936	0,2757	-0,2915	-0,4143	14,5627	9,1715	5,3912	0
183	0,9169	0,2942	-0,1142	1,1786	14,8287	12,3571	2,4716	0
184	0,0522	0,8919	1,8904	0,3693	17,8355	10,7385	7,0970	0
185	0,2555	0,5194	-1,6396	-0,7315	12,5405	8,5369	4,0036	0
186	0,2298	0,6649	-0,8740	0,6346	13,6891	11,2693	2,4198	0
187	0,8656	0,9834	0,5344	-0,1788	15,8016	9,6424	6,1592	0
188	0,0760	0,6855	-0,8945	0,6850	13,6582	11,3700	2,2882	0
189	0,7341	0,6852	-0,3113	-0,3266	14,5331	9,3468	5,1863	0
190	0,1048	0,0613	1,9686	2,3171	17,9528	14,6342	3,3187	0
191	0,9764	0,8612	0,1405	0,3471	15,2108	10,6941	4,5166	0
192	0,4232	0,9002	1,0618	0,4244	16,5928	10,8488	5,7440	0
193	0,0157	0,6796	-1,2343	0,0868	13,1486	10,1736	2,9750	0
194	0,9938	0,4422	-0,1039	1,0147	14,8441	12,0295	2,8147	0
195	0,2305	0,6929	-0,6012	-0,6891	14,0982	8,6217	5,4765	0
196	0,4059	0,9742	1,3252	-0,1041	16,9879	9,7918	7,1961	0
197	0,5373	0,8379	0,5846	-0,5128	15,8768	8,9744	6,9025	0
198	0,5239	0,0406	1,1002	2,0462	16,6502	14,0925	2,5577	0
199	0,9202	0,3410	-0,2206	0,2690	14,6690	10,5380	4,1310	0
200	0,6587	0,5091	-0,9123	0,9901	13,6315	11,9803	1,6512	0

Número de simulações (N)	Média (μ)	Desvio padrão (σ)	β	Probabilidade de falha (p_f)
200	4,895	2,419	2,024	0,025

C. Programa VaP

O programa utilizado para implementar o método de Monte Carlo foi o VaP 1.6. O programa VaP foi criado pelo Dr. Markus Petschacher e, depois, foi feita uma adaptação para o Microsoft Windows por Dr. Georgi Simov e Stoyan Toulev, no *Institute of Structural Engineering IBK, ETH Zurich*, Suíça. O VaP foi escolhido por causa de sua simplicidade e, principalmente, pelo fato de permitir que se utilize funções de falha com um grande número de variáveis aleatórias.

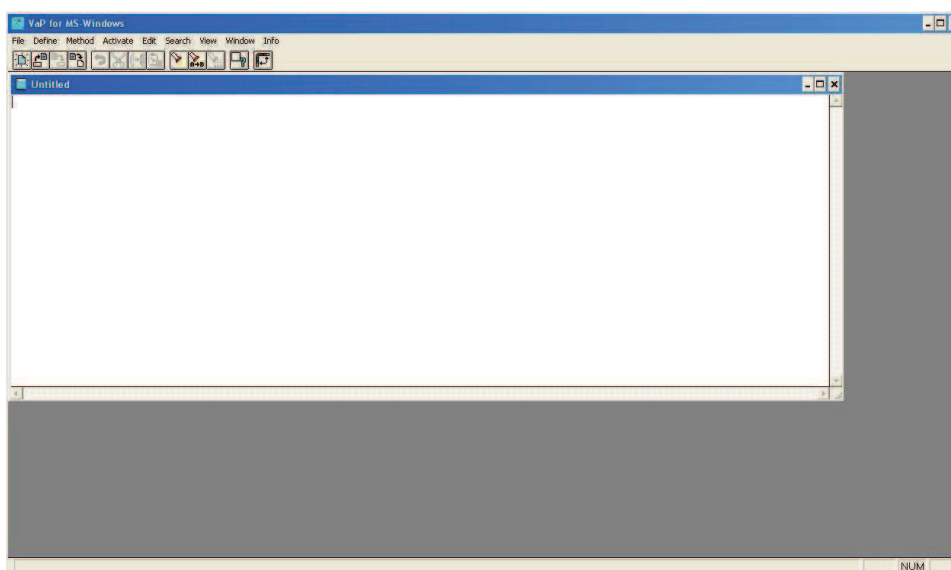


Figura 9-1 - Tela inicial do programa VaP

Na figura 9-1, é apresentada a tela inicial do programa. O programa VaP permite que se entre com a função de falha na forma de texto, como indica a figura 9-2.

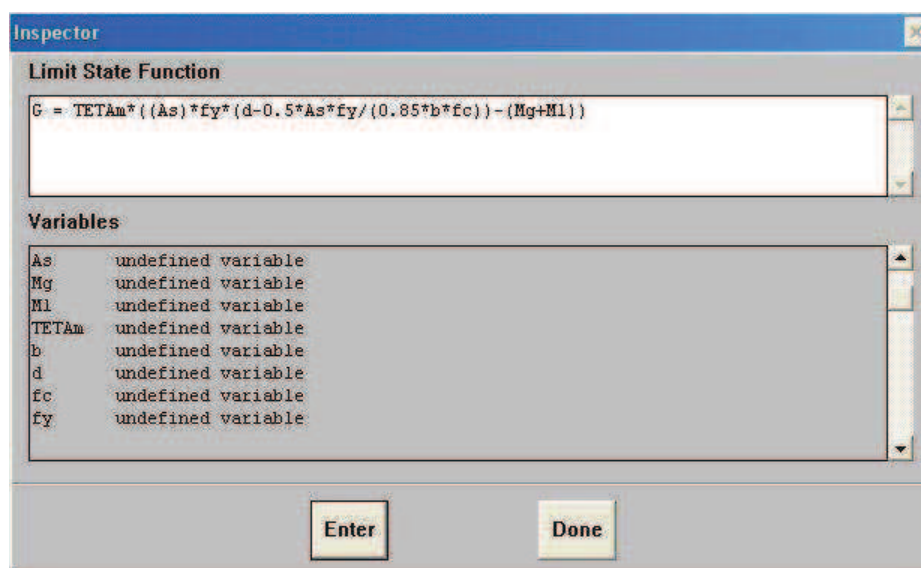


Figura 9-2 - Janela para entrada da função de falha

Ao clicar no botão *Enter*, o programa detecta todas as variáveis da função inserida. Ao clicar no botão *Done*, volta-se à tela inicial. O próximo passo consiste em definir as distribuições das variáveis e o seus respectivos parâmetros. Isto é feito clicando-se no menu *Define* e escolhendo a opção *Variables*. Ao fazer isso, a janela da figura 9-3 aparece.

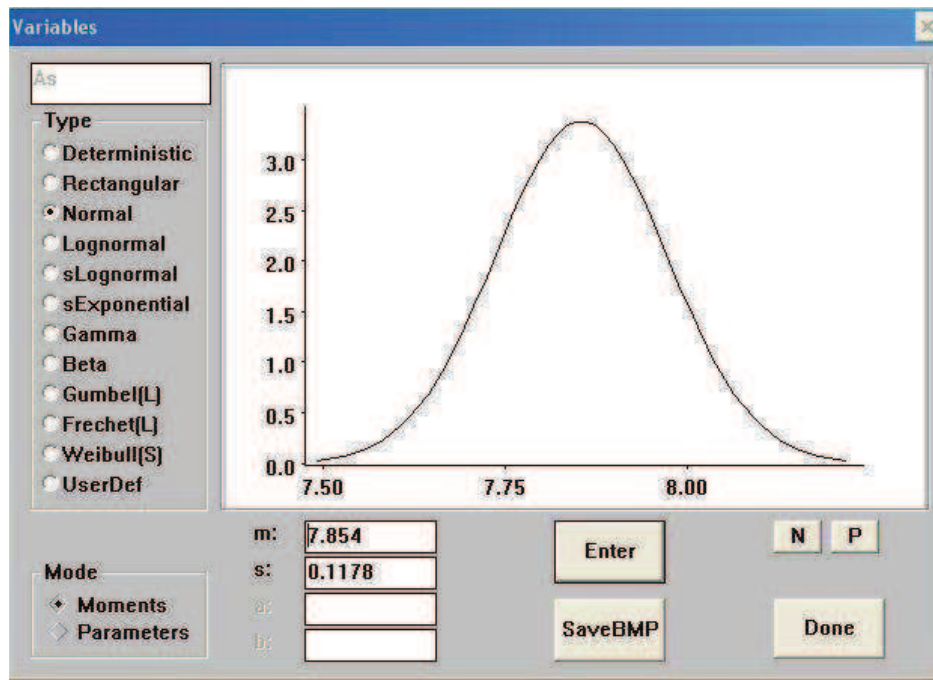


Figura 9-3 - Janela para definir os parâmetros das variáveis aleatórias

Ela identifica a variável no canto superior esquerdo. Logo abaixo, ele permite escolher o tipo de distribuição. Ao lado direito, tem-se um gráfico esquemático da distribuição. Os parâmetros da função são definidos nas caixas de texto abaixo da área do gráfico. Após definir as distribuições e os parâmetros, deve-se clicar no botão *Enter* para que o programa aceite os valores. Os botões “N” e “P” permitem passar pelas variáveis definidas. Ao terminar de definir todas as variáveis, pode-se clicar no botão *Done*.

Com a função e as variáveis aleatórias definidas, pode-se realizar a análise. O programa permite que sejam utilizados métodos como o FORM e o método de Monte Carlo. No caso, será utilizado o método de Monte Carlo. Ao se escolher este método no menu *Method*, a janela da figura 9-4 aparece.

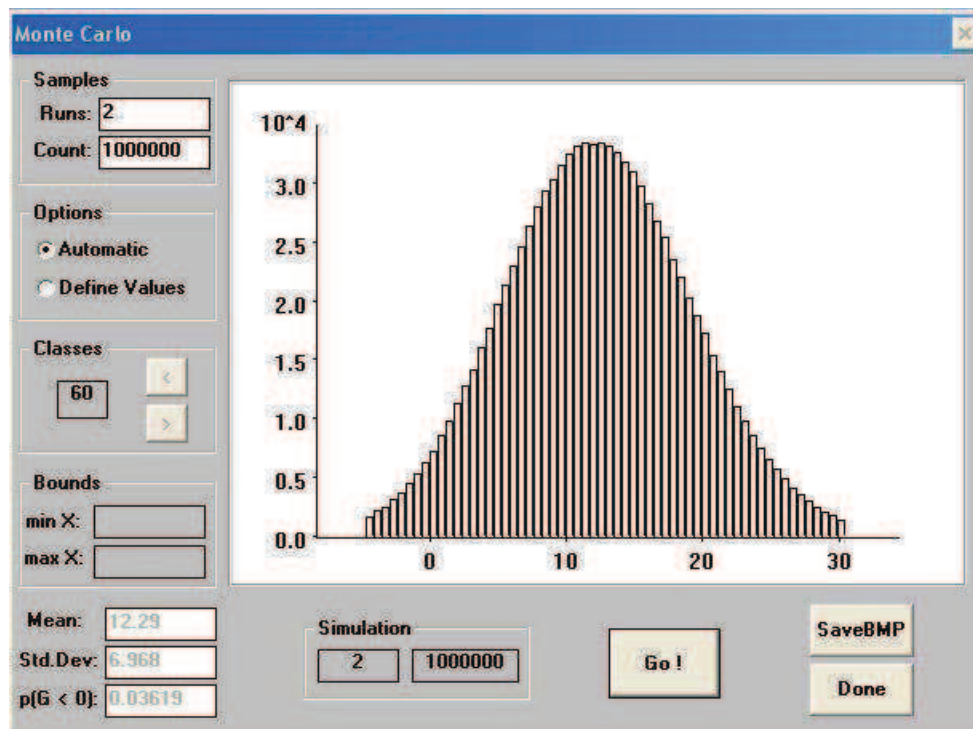


Figura 9-4 - Janela mostrando o resultado do método de Monte Carlo

Ela permite escolher o número de rodadas (*Runs*) e o número de simulações para cada rodada (*Count*). Logo abaixo, há opções para definir o intervalo de exibição do gráfico. Ao lado direito, tem-se um gráfico, na forma de histograma, com a distribuição dos resultados. No canto inferior esquerdo, aparecem os resultados da análise: média (*Mean*), desvio padrão (*Std. Dev.*) e a probabilidade de falha ($p(G < 0)$). Quando a análise é concluída, o programa apresenta um resumo dos resultados na forma de texto, para cada rodada, dos valores encontrados para a média, o desvio padrão, o coeficiente de *skewness*, o coeficiente de *kurtosis* e a probabilidade de falha.

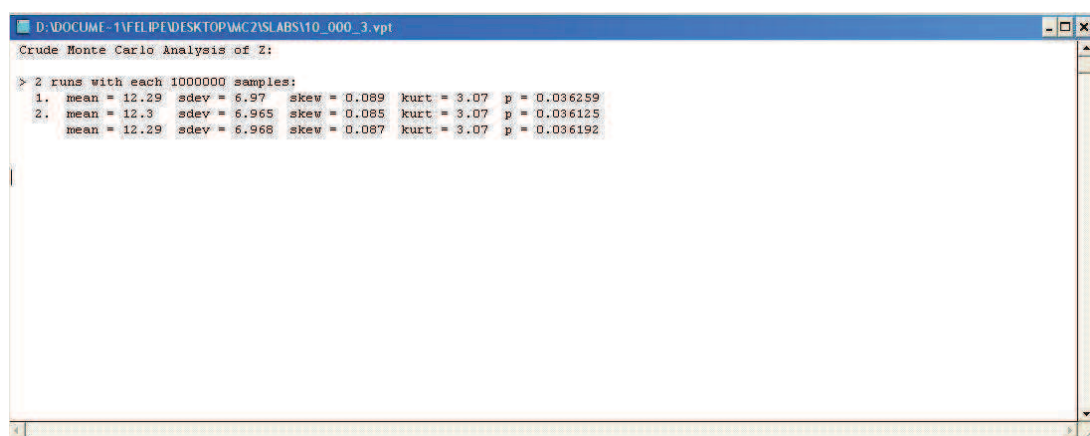


Figura 9-5 - Resumo dos resultados na forma de texto